

TOPOLOGIEKURS IN DER GYMNASIALEN OBERSTUFE

Gisela Studenny

1970
—

INHALTSVERZEICHNIS

TOPOLOGIEKURS IN DER GYMNASIALEN OBERSTUFE

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Fakultät für Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität

München



vorgelegt von

Gisela Studeny

aus Planegg/München

im September 1974

in neuer Fassung vorgelegt

im Mai 1976

überarbeitet und erneut vor-
gelegt im Dezember 1976

München 1978



1. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Kasch
 2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Seebach
- Tag der mündlichen Prüfung: 20. Februar 1978

INHALTSÜBERSICHT

Die Didaktik der Mathematik ist ein Arbeitsfeld, das noch eine Fülle von unbeantworteten Fragen aufweist. Insbesondere bedingt die Weiterentwicklung der Mathematik in Bezug auf Inhalt und Auffassung eine ständige Überprüfung von Inhalt und Unterrichtsmethode der Schulmathematik.

Es gibt mehrere Möglichkeiten mathematikdidaktische Probleme zu systematisieren. Eine besteht darin, sie nach den klassischen Stoffgebieten der Mathematik einzuteilen mit denen sie zu tun haben. So kann von einer Didaktik der Algebra, einer Didaktik der Geometrie, einer Didaktik der Analysis usw. gesprochen werden. Die so erhaltene Klassifizierung von Problemen der Mathematikdidaktik erscheint angebracht, da die schulische Behandlung der Algebra, der Geometrie, der Analysis usw. tatsächlich je für sich spezifische methodisch-didaktische Schwierigkeiten aufweisen. Eine Überschneidung der vorgenannten speziellen Didaktiken soll dabei selbstverständlich berücksichtigt werden.

Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag zur Didaktik der Topologie sein. Speziell konzentriert sich die Untersuchung auf die Didaktik der Topologie der Schule und hier auf das Problem eines eigenständigen Topologiekurses im Rahmen des Kurssystems der neuen gymnasialen Oberstufe. Warum gerade dieses Problem untersucht wird, soll im folgenden begründet werden.

Wählt man das Thema "Topologie"¹⁾ zu einem Untersuchungsobjekt der Mathematik-Didaktik, so wird man im wesentlichen mit drei Problemstellungen konfrontiert.

- 1) Zunächst läßt sich fragen, wie die Stellung der Topologie in der Schulmathematik gemäß der Bedeutung, die ihr in der heutigen Schulmathematik zukommt, grundsätzlich aufgewertet werden kann. Die erste Problemstellung besteht darin, Mittel und Wege aufzuzeigen, das oben genannte Ziel im Rahmen derzeit gültiger Lehrpläne zu verwirklichen. Demgemäß hieße eine erste Aufgabe, für alle Schul- und Altersstufen die bereits jetzt im Mathematikunterricht verwendeten topologischen Begriffe und topologischen Aussagen (in expliziter oder impliziter Form) auszumachen. Die zu erarbeitenden konstruktiven Vorschläge, welche auch gerade die Lehrer- aus- und -fortbildung jeweils einbeziehen müssen, betreffen hauptsächlich die Unter- und Mittelstufe der weiterführenden Schulen (einschließlich Klasse 11).
- 2) Eine zweite Problemstellung setzt sich dasselbe Ziel wie die erste, nun jedoch unter der Voraussetzung, daß Änderungen an den derzeit gültigen Lehrplänen möglich seien, wobei allerdings die Topologie nicht als eigene Disziplin des Mathematikunterrichts der Schulen auftreten soll. Diesbezüglich notwendige Veränderungen an den Lehrplänen haben u.a. das Motiv, der Analysis bereits vor ihrer Einführung die nötigen topologischen Hilfsmittel an die Hand zu geben. Daher befaßt sich diese Problemstellung insbesondere mit dem Mathematikunterricht der Unter- und Mittelstufe der weiterführenden Schulen.

1) genauer müßte es heißen: Didaktik der Topologie

- 3) Die dritte Problemstellung setzt sich mit der Frage auseinander: Wie kann die mengentheoretische Topologie als abgeschlossene Disziplin in die Schulmathematik aufgenommen werden? Das aber bedeutet, daß der Topologie in Form eines zusammenhängenden Kurses ein eigener Ort neben den übrigen Teildisziplinen der Schulmathematik zugestanden wird.

Für jede der drei Problemstellungen müßte ein Stoffplan erarbeitet werden und diesem eine möglichst detaillierte didaktisch-methodische Aufbereitung beigegeben werden. Hand in Hand damit müßten praktische Erprobungen gehen. Es ist leicht einzusehen, daß sich die auf die Problemstellung 1) und 2) beziehende praktische Erprobung über mehrere Jahre erstrecken müßte, selbst wenn die Anforderungen an die Breite der Erprobung auf ein Minimum reduziert würden. Außerdem scheinen die Aussichten auf Realisierung in der Schulwirklichkeit für die unter 1) und 2) angesprochenen Ziele ungünstiger zu sein als für die unter 3) angesprochenen. Eben genannte Gründe veranlaßten mich dazu, für die vorliegende Arbeit die dritte Problemstellung zu wählen. Die Motivation hierzu wird im Abschnitt 0 meiner Arbeit noch ausführlich begründet.

In groben Zügen soll im folgenden ein Überblick gegeben werden, wie die dritte der obengenannten Problemstellungen bearbeitet wurde. Meine Aufgabe bestand darin, das Problem so konkret und bis ins Detail gehend zu bearbeiten, daß eine unmittelbare Umsetzung in die Schulpraxis möglich sein sollte.

So hat der **S t o f f p l a n** seinen Niederschlag in einem eigens erstellten Schülerbuch gefunden. Er kann im Prinzip aus dem Inhaltsverzeichnis des Schülerbuchs gesehen werden (siehe Seite X und XI). Trotzdem sollen an dieser Stelle kurz die wesentlichen Begriffe und Aussagen, die im Kurs behandelt werden, angegeben werden.

Der Stoffplan läßt vier Schwerpunkte erkennen:

- (1) Axiomensystem des topologischen Raumes und nötigste Grundbegriffe der Topologie
- (2) Konvergenz von Folgen in allgemeinen topologischen Räumen
- (3) Anschaulich gewonnene Begriffe werden auf exakte mathematische Grundlagen gestellt
- (4) Stetigkeit von Abbildungen, topologische Abbildungen

Zu (1) gehören die Definitionen der Begriffe "offene Menge", "topologischer Raum", "diskrete Topologie", "indiskrete Topologie", "ist gröber als", "abgeschlossene Menge", "abgeschlossene Hülle", "Basis einer Topologie", "hausdorffscher Raum", "metrischer Raum", "Umgebung eines Punktes", "Umgebungssystem und Umgebungsbasis zu einem Punkt". Zu all diesen Begriffen werden gerade die Aussagen in den Stoffplan aufgenommen, die für die Themenkreise (2), (3) und (4) nützlich sind. Zu (2) gehört die Konvergenzdefinition für Folgen in allgemeinen topologischen Räumen und vor allem die Erkenntnis, daß das Konvergenzverhalten einer gegebenen Folge in M von der Topologie mit der M ausgestattet ist, abhängig ist. Die besondere Rolle der Eigenschaft "hausdorffsch" hierbei wird unterstrichen. Danach werden die Konvergenzkriterien, die der Schüler aus der Analysis für Folgen aus $\mathbb{R}$ kennt, daraufhin untersucht, ob sie auch in beliebigen topologischen Räumen gelten. Dabei stellt sich heraus, daß in einem metrischen Raum Cauchy-Konvergenz und Endstück-Konvergenz einer Folge nicht notwendig äquivalent sein müssen. Eine Brücke vom Themenkreis (2) zum Themenkreis (3) bildet die Behandlung der Begriffe "Häufungspunkt einer Menge" und "abgeschlossene Hülle einer Menge" und deren allgemeiner Eigenschaften.

Im Zuge der Behandlung der "abgeschlossenen Hülle einer Menge" tritt auch die Bezeichnung "liegt dicht in" hinzu. Aufbauend auf dem Begriff "abgeschlossene Hülle einer Menge" werden dann der "Rand", das "Innere" und das "Äußere einer Menge" definiert, d.h. Anschauliches wird auf eine abstrakte Grundlage gestellt (siehe (3)). Die Stetigkeit wird zunächst als mögliche "globale" Eigenschaft einer Abbildung von einem topologischen Raum nach einem anderen eingeführt, also unabhängig vom Konvergenzbegriff definiert. Die Rolle der Topologien auf Quelle und Ziel der Abbildung für ihre Stetigkeit gehört mit zu den wichtigsten Erkenntnissen dieses Abschnitts des Lehrgangs. Bei der Beschäftigung mit Beispielen sucht der Schüler auch nach der initialen und der finalen Topologie einer Abbildung ohne daß diese Bezeichnungen verwendet werden. Für stetige bijektive Abbildungen, die eine stetige Umkehrung haben, wird die Bezeichnung "Homöomorphismus" und auch "topologische Abbildung" eingeführt. Überlegungen über die Invarianten von topologischen Abbildungen klingen an. Schließlich wird die "globale" Stetigkeitsdefinition mit der "lokalen", dem Schüler aus dem Analysisunterricht bekannten Stetigkeitsdefinition in Zusammenhang gebracht. Ist die Eigenschaft "konvergenzerhaltend zu sein" für eine Abbildung von (M, τ) nach (R, σ) eine notwendige und hinreichende Bedingung für Stetigkeit? Diese Frage bildet den Ausklang des Kurses, wobei auch auf das Verhalten der Häufungspunkte einer Menge bei stetigen Abbildungen eingegangen wird.

Der didaktisch-methodischen Aufbereitung des voranstehend skizzierten Stoffplanes wird in dieser Arbeit der breiteste Raum zugestanden. Sie muß als das wichtigste Anliegen der Arbeit angesehen werden. Sie findet sich durch drei Teile der Arbeit repräsentiert:

- durch die grundsätzlichen Vorüberlegungen des Abschnitts 1
- durch das didaktisch-methodische Konzept des Schülerbuches
- durch das ausführliche Lehrerhandbuch.

Im Lehrerhandbuch ist die Möglichkeit gegeben, auf die vielen Detailprobleme der Problemstellung 3 (siehe Seite III) einzugehen. Hier werden auch methodisch-didaktische Schlüsse aus Ergebnissen des Schulversuches gezogen. Das Lehrerbuch wurde so ausführlich gehalten, daß es einem Mathematiklehrer des Gymnasiums möglich sein sollte, einen Topologiekurs zum ersten Mal zu halten. Das Lehrerhandbuch ist bewußt gesondert gebunden, denn es soll parallel zum Schülerbuch gelesen werden. Daher wird im Schülerbuch nicht eigens auf die zum Verständnis der methodisch-didaktischen Absicht erforderliche Stelle im Lehrerhandbuch hingewiesen.

Zur Erfüllung der beiden Hauptaufgaben der Arbeit, den Stoffplan eines Topologiekurses zu erstellen und ihn didaktisch-methodisch bis zur praktischen Durchführbarkeit aufzubereiten, gehört unbestritten die praktische Erprobung. Ihre Daten sind auf Seite 10 ff wiedergegeben. Diese Erprobung konnte, wie aus den Daten ersichtlich, nur innerhalb der mir vorgegebenen notwendigerweise begrenzten Möglichkeiten vorgenommen werden. Sie kann jedoch als Anregung gelten, die Erprobung auf breiterer Basis weiterzuführen. Die eigenen, wenn auch begrenzten Erfahrungen sind hierzu ermutigend. Diese Erfahrungen werden teilweise explizit geschildert und sind in dieser Form der Wiedergabe verstreut im Lehrerhandbuch zu finden. Implizit haben sie wesentlich zur laufenden Revision im didaktischen Konzept des Lehrgangs geführt.

ZUSAMMENFASSUNG

Aus Diskussionsbeiträgen auf der 7. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Worms 1973 und der 8. Bundestagung in Berlin 1974 sowie aus persönlichen Gesprächen mit Lehrerkollegen und Fachdidaktikern kann man entnehmen, daß trotz der Vorstöße einiger Didaktiker (siehe hierzu Kap. 0) es die derzeit noch vorherrschende Meinung ist¹⁾, die Topologie nicht als eigene Disziplin in die Schulmathematik aufzunehmen. Dementsprechend wird vorgebracht:

- 1) Die Topologie biete zuwenig Motivation in sich, als daß sie Schüler ansprechen würde
- 2) Topologie überfordere Schüler wegen der Abstraktheit ihrer Aussagen und des unumgänglichen Überwiegens der Deduktionen
- 3) Topologie - wolle man auch nur halbwegs einen abgerundeten Eindruck von ihr erhalten - sei zu umfangreich für einen einjährigen Kurs
- 4) Topologie habe außer für spätere Mathematik-Studenten wenig Nutzen für den Schüler.

Dem allen tritt die vorliegende Arbeit mit folgenden Thesen entgegen, die in dreierlei Weise gestützt werden: durch eine theoretische Abhandlung²⁾, durch konstruktive didaktisch-methodische Vorschläge³⁾ und durch eine empirische Untersuchung⁴⁾.

-
- 1) Die erste Fassung der vorliegenden Arbeit wurde im Sommer 1974 fertiggestellt.
 - 2) Siehe Abschnitt 0, Seite 1 ff, besonders aber S.7-9
 - 3) Siehe die Abschnitte 1, 2 und 3 (didaktisch-methodische Vorüberlegungen S.16-55, vollständiges Buch zum Lehrgang S. 56-222, Hinweise und Vorschläge zur Methodik S. 223 ff, aufgeschlüsselt zu den einzelnen Lehrbuchpassagen)
 - 4) Siehe die Abschnitte 0 und 3 (Daten der Erprobung S. 9-15, Pädagogische Erfahrungen und Einsichten aus der Erprobung S. 223 ff eingestreut in die methodischen Vorschläge zum Lehrgang).

- 1) Bei geeigneter didaktisch-methodischer Aufbereitung gelingt es, den Schüler für die mengentheoretische Topologie zu interessieren und ihn für die Mitarbeit an einem Kurs über dieses Thema zu motivieren.
- 2) Es existiert mindestens eine Spielart eines Topologie-Lehrgangs, die den Schüler nicht überfordert und die
- 3) dem Schüler nach Beendigung des einjährigen Kurses einen angemessen abgerundeten Eindruck der Topologie hinterläßt.
- 4) Die Topologie hat mindestens ebensoviel Berechtigung, in den Lehrplan der Oberstufe des Gymnasiums aufgenommen zu werden, wie andere Disziplinen, die bereits aufgenommen sind, geht man von der Frage nach dem didaktischen Nutzen für den Durchschnittsabiturienten aus.

Die Arbeit weist folgendes Ergebnis auf:

Alle oben genannten Thesen können gehalten werden. Die angesprochenen Erwartungen haben sich bei dem speziell hier vorgelegten Entwurf eines Topologie-Lehrgangs bestätigt. Hierbei muß bedacht werden, daß eine der beiden Schülergruppen, mit denen die Erprobung durchgeführt wurde, sogar ihrem Alter, ihrer mathematischen Vorbildung und ihrer Neigung für mathematisch-naturwissenschaftliche Fächer nach bewußt so ausgewählt war, daß das Eintreffen des erwarteten Ergebnisses erschwert war.

Die praktische Durchführung des vorgelegten Kursentwurfes für Topologie führte dazu, daß der ursprüngliche Entwurf in vielen Details revidiert werden mußte. Der Abschnitt 2 der Arbeit gibt das Schülerbuch zum Lehrgang bereits in seiner überarbeiteten Form wieder. Didaktisch-methodische Schlüsselstellen des Lehrganges werden in Abschnitt 3 ausführlich behandelt, wobei es oft auf

kleine Details im methodischen Aufbau ankommt.

Obige vier Thesen werden maßgeblich von einem Faktor bestimmt, der Methodik, die bei der Durchführung der einzelnen Schritte des Topologie-Lehrgangs gewählt wird. Das bedeutet, daß die methodische Gestaltung auch der kleinsten Einheiten des Lehrgangablaufs genauestens durchdacht und geplant werden muß. Die Leistung der vorliegenden Arbeit besteht zu einem großen Teil in diesen methodischen Detailüberlegungen, welche wohl erst im vollen Umfang erkennbar werden - und dies ist das Problem für den Leser jeder didaktischen Abhandlung - wenn die vorgeschlagene Durchführung in der Schulwirklichkeit nachvollzogen wird.

Eine Einengung der oben genannten Thesen auf die Frage: Sollen Topologiekurse in der gymnasialen Oberstufe eingeführt werden oder nicht? würde dem Anliegen der Arbeit nicht gerecht. Es geht vielmehr vorrangig um die Frage: Gibt es Fakten, die rechtfertigen, daß an dem Problem "Einführung von Topologiekursen in der gymnasialen Oberstufe" weitergearbeitet wird? Die vorliegende Arbeit zeigt solche Fakten auf und liefert darüberhinaus methodisch-didaktische Aussagen, die bereits jetzt in der Didaktik der Analysis befruchtend wirken können.

Inhaltsverzeichnis

=====

	Seite
0 Bedeutung der mengentheoretischen Topologie für den Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe	1
1 Vorüberlegungen zum Entwurf eines Lehrgangs Topologie	16
1.1 Gedanken zur Methodik der Einführung der Axiome und Definitionen	17
1.2 Die verschiedenen Axiomensysteme eines topologischen Raumes als methodisch-didaktisches Problem	23
1.2.1 Methodische Bedeutung des Axiomensystems von Hausdorff	25
1.2.2 Methodische Bedeutung des Axiomensystems von Kuratowski	29
1.2.3 Methodische Bedeutung des Axiomensystems	32
1.3 Lernziele des Lehrgangs	35
1.4 Methodische Grundgedanken zum Lehrgang	42
1.4.1 Das Problem der Vorkenntnisse	42
1.4.2 Allgemeine methodische Leitlinien	46
1.4.3 Der Faktor "Lehrperson"	53
1.4.4 Bemerkungen zur formalen Gestaltung des Schülerbuches	54
2 Das Schülerbuch zum Lehrgang	56
2.1 Axiomatische Grundlegung	56
2.1.1 Vorbereitende Fragen und Aufgaben	56
2.1.2 Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen	68
2.1.3 Die Axiome und weitere Beispiele für topologische Räume	73

2.2	Weitere Begriffe in topologischen Räumen	78
2.2.1	Abgeschlossene Mengen	78
2.2.2	Basis einer Topologie	86
2.2.3	Metrische Räume	95
2.2.4	Umgebungen eines Punktes	106
2.3	Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen	119
2.3.1	Der Begriff "Folge"	119
2.3.2	Konvergenzdefinition	128
2.3.3	Konvergenzkriterien	142
2.4	Häufungspunkt	145
2.4.1	Häufungspunkt einer Menge	145
2.4.2	Inneres, Äußeres, Rand einer Menge	162
2.5	Abbildungen topologischer Räume	174
2.5.1	Der allgemeine Abbildungsbegriff	174
2.5.2	Bild einer Topologie, Urbild einer Topologie	187
2.5.3	Homöomorphismen	199
2.5.4	Stetige Abbildungen	206
2.5.5	Konvergenz und Stetigkeit	217
2.6	Nachwort	222
3	Das Lehrerhandbuch zum Lehrgang	223
3.1	Zu 2.1: Axiomatische Grundlegung	223
3.1.1	Zu 2.1.1: Vorbereitende Fragen und Aufgaben	224
3.1.2	Zu 2.1.2: Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen	245
3.1.3	Zu 2.1.3: Die Axiome und weitere Beispiele für topologische Räume	253
3.2	Zu 2.2: Weitere Begriffe in topologischen Räumen	263

	Seite
3.2.1	Zu 2.2.1: Abgeschlossene Mengen 265
3.2.2	Zu 2.2.2: Basis einer Topologie 273
3.2.3	Zu 2.2.3: Metrische Räume 284
3.2.4	Zu 2.2.4: Umgebungen eines Punktes 301
3.3	Zu 2.3: Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen 311
3.3.1	Zu 2.3.1: Der Begriff "Folge" 313
3.3.2	Zu 2.3.2: Konvergenzdefinition 323
3.3.3	Zu 2.3.3: Konvergenzkriterien 339
3.4	Zu 2.4: Häufungspunkt 342
3.4.1	Zu 2.4.1: Häufungspunkt einer Menge 346
3.4.2	Zu 2.4.2: Inneres, Äußeres, Rand einer Menge 364
3.5	Zu 2.5: Abbildungen topologischer Räume 369
3.5.1	Zu 2.5.1: Der allgemeine Abbildungsbegriff 373
3.5.2	Zu 2.5.2: Bild einer Topologie, Urbild einer Topologie 378
3.5.3	Zu 2.5.3: Homöomorphismen 385
3.5.4	Zu 2.5.4: Stetige Abbildungen 390
3.5.5	Zu 2.5.5: Konvergenz und Stetigkeit 401
3.6	Zu 2.6: Nachwort 403

O Bedeutung der mengentheoretischen Topologie für den
Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe
=====

Auf einer Reihe von Kongressen, zu denen sich Mathematiker und Didaktiker der Mathematik in den letzten Jahren zusammenfanden, konnte man beobachten, daß die Bedeutung der Topologie für den Mathematik-Unterricht aller Schulstufen in wachsendem Umfang ein Diskussionsthema darstellt. Dieselbe Tendenz spricht aus zahlreichen Aufsätzen. Dies hat teilweise bereits zur Verwirklichung einzelner Vorschläge geführt. So wird etwa in den Unterricht der Grundschule und Sekundarstufe I bereits hie und da die sogenannte "Linientopologie"¹⁾ einbezogen oder zumindest mit Begriffen aus diesem Gebiet der Topologie gearbeitet. Psychologische Erkenntnisse²⁾ haben diese Entwicklung eingeleitet, und ihre Bedeutung für den Geometrieunterricht der Sekundarstufe I darf nach Meinung vieler Autoren³⁾ nicht unter-

-
- 1) vgl. dazu Fricke, A. und Besuden, H.: Mathematik; Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart 1970, S. 151
 - 2) Piaget, J.; Inhelder, B.: La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris 1948
 - 3) Lietzmann, W.: Anschauliche Topologie. München 1965
Wolff, G. (Hrsg.): Handbuch der Schulmathematik, Band 5, Hannover 1967
Besuden, H.: "Topologische Fragestellungen" in: Mathematik, Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart 1970, S. 147-160
Weidig, I.: "Topologische Fragen in der geometrischen Propädeutik" in: Der Mathematikunterricht, Stuttgart 16/1970, Heft 1, S. 5-17
Mellin, E.: "Topologie in der Realschule" in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, Teil 2, Hannover 1971, S. 187-199
Wallrabenstein, H.: "Unterrichtsversuche zur Topologie im 5. Schuljahr" in: Die Schulfache, Villingen, 23/1970/12, S. 45-54

schätzt werden. U.a. hat D i e n e s ¹⁾ einen gangbaren Weg gezeigt, die elementare Topologie in einen mathematischen Lehrgang für Grundschüler einzubauen. Einige Schulbuchwerke sind diesem Vorbild in neuester Zeit wenigstens ein Stück weit gefolgt. Freilich gibt es auch Stimmen, die davor warnen, Begriffe der Topologie bereits in der Grundschule zu bringen, wenn diese Grundbegriffe nicht als Fundament für spätere Disziplinen des Mathematikunterrichts dienen.²⁾ Diese Kritik muß jedoch nicht notwendig mit Streichungen in den oben beschriebenen Bestrebungen der Grundschule beantwortet werden, sondern könnte Anstoß sein, darüber nachzudenken, wie der Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II aussehen sollte, um der in der Kritik enthaltenen Forderung gerecht zu werden. Da man sich darüber einig ist, in diesen Schulstufen algebraische Strukturen und Ordnungsstrukturen zu behandeln, sollte man konsequenterweise auch topologische Strukturen in die Stoffpläne aufnehmen. Diese drei Strukturen werden ja bekanntlich nach B o u r b a k i ³⁾ als die Grundstrukturen der Mathematik angesehen.

Bis zur Verwirklichung solcher Ziele bleibt immerhin die Möglichkeit, Topologie in der Oberstufe des Gymnasiums, speziell der geplanten Kollegstufe, zu betreiben. Im Hinblick auf die in der Infinitesimalrechnung der gymnasialen Oberstufe zentralen Begriffe Stetigkeit und Grenzwert

1) Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Die Entdeckung des Raumes. Freiburg 1967

Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Topologie und Schattengeometrie. Freiburg 1969.

2) Meschkowski, H. (Hrsg.): Mathematik-Duden für Lehrer. Mannheim 1969, S. 307/308

3) Bourbaki, N.: Éléments de Mathématique. Théorie des ensembles, Paris 1955

wird das die mengentheoretische¹⁾ Topologie sein, die diese Begriffe in ausgezeichneter Weise liefert bzw. sichert.²⁾

Da P a p y einen Lehrgang über mengentheoretische Topologie und Analysis für 16-jährige mit Erfolg durchgeführt hat, den er allerdings bereits vorbereitend bei 12-jährigen einleitete³⁾, kann man davon ausgehen, daß bei geeigneter Aufbereitung des Stoffes und Beschränkung in der Fülle der Begriffe ein solcher Lehrgang in der Kollegstufe durchaus durchführbar ist. Allerdings wird man bei der Konzeption des Lehrgangs darauf achten müssen, daß er Primaner ansprechen soll, während Papy den Kurs mit 12- bis 16-jährigen durchführt.⁴⁾

Es gilt heute als unbestritten, daß es ein Ziel des Mathematikunterrichts am Gymnasium sein sollte, "dem Schüler unter Konzentration auf die fundamentalen Einsichten und Fertigkeiten in elementarer Weise ein angemessenes Bild von dem zu geben, was Mathematik und mathematische Wissen-

-
- 1) Im Gegensatz zur "anschaulichen" Topologie, wie ich den anderen Zweig der Topologie in Anlehnung an den Titel des Buches von Lietzmann nennen möchte.
 - 2) Siehe dazu etwa:
Dzewas, J.: "Topologische Strukturen im Analysisunterricht" in: Der Mathematikunterricht, Jg. 16(1970), Heft 1, S. 74-79
Dieudonné, J.: Foundations of modern analysis. New York 1960
Bourbaki, N.: Les structures fondamentales de L'analyse, livre III: Topologie générale. Paris 1951
 - 3) Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysisunterrichts. Göttingen 1970
Papy, G.: Arlon 6, Bruxelles 1968
Papy, G.: Arlon 8, Bruxelles 1968
 - 4) Servais, W.: "Vorbereitung der 12- bis 15-jährigen für den Analysis-Unterricht" in: Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen. Stuttgart 1969. S. 66-71

schaft ist."¹⁾ Dazu gehört aber auch ein Vertrautmachen der Schüler mit Axiomatik. Dies wird nach Lenné sowohl von den gemäßigten wie von den extremen Neuerern des Mathematikunterrichts gefordert²⁾, wobei Lenné als Beleg eine Reihe von Didaktikern nennt.³⁾ Was verbirgt sich hinter der schlagwortartigen Forderung "Axiomatik im Unterricht"? Es kann sich dreierlei verbergen:

1) die Forderung, den Schüler mathematische Strukturen von den Axiomensystemen ausgehend kennenlernen zu lassen; 2) die Forderung, dem Schüler an verschiedenen Beispielen den Vorgang des Axiomatisierens bewußt zu machen und ihm allmählich Übung im Axiomatisieren zu geben; 3) die Forderung, mit Schülern über verschiedene Axiomensysteme zu sprechen und diese dabei zu Untersuchungsobjekten der Meta-Mathematik werden zu lassen.

-
- 1) Steiner, H.-G.: "Verschiedene Aspekte der axiomatischen Methode im Unterricht" (Vortrag auf IMUK-Tagung, Echternach 1965) in: Les Repercussions de la Recherche Mathématique sur l'Enseignement. Luxembourg 1966
 - 2) Lenné, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Stuttgart 1969, S. 233/234
 - 3) Eisenbach, A.: "Elementare Beispiele zur Axiomatik" in: Der Mathematikunterricht Jg. 7 (1961), Heft 1, S. 38-56

Steiner, H.-G.: "Elementare Logik und Wahrscheinlichkeitstheorie" in: Der Mathematikunterricht Jg. 8 (1962), Heft 1, S. 16-38

Ineichen, R.: "Über die Grundlage und den Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung" in: Der Mathematikunterricht Jg. 6 (1960), Heft 3, S. 7-15

Pickert, G.: Ebene Inzidenzgeometrie. Frankfurt 1958

Schuster, H.: Ebene Inzidenzgeometrie. Stuttgart 1962

Meschkowski, H.: Mathematik als Bildungsgrundlage. Braunschweig 1965

Athen, H.: "Die Vektorrechnung im Unterricht der deutschen höheren Schule" in: Der Mathematikunterricht Jg. 1 (1955), Heft 3, S. 5-21

Vor allem die erste der drei Forderungen ist ein Argument für das Hineinnehmen der Topologie in den Mathematikunterricht des Gymnasiums. Das Argument gewinnt zusätzlich an Überzeugungskraft, wenn man der Topologie andere mathematische Stoffgebiete gegenüberhält, die - wie die Topologie - nicht im traditionellen Mathematikunterricht vertreten waren, über deren Einbeziehung in den heutigen Mathematikunterricht aber bereits Erfahrungen vorliegen. Die Tendenz der neuen Mathematikdidaktik, "strukturorientierte Allgemeinbildung"¹⁾ als ein Ziel des Mathematikunterrichtes anzusehen, brachte es mit sich, daß heute Lehrgänge über Inzidenzgeometrie oder über Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Kollegstufe angeboten werden. Zur Begründung wird angeführt, daß diese Beispiele die axiomatische Einführung eines Stoffbereiches der Mathematik mit einem vertretbaren Zeitaufwand möglich machen.²⁾ Diese Gründe können nun aber auch von einem geeigneten Lehrgang über mengentheoretische Topologie für sich in Anspruch genommen werden. Als positiv kommt hinzu, daß für die topologische Struktur aus dem bisherigen Mathematikunterricht bereits anschauliche Modelle vorhanden sind und eine Hilfe für den Zugang darstellen. Aus den bisher genannten Gründen sollte man ohne Scheu die Theorie der topologischen Räume gleichzeitig mit Kursen über Inzidenzgeometrie wahlweise anbieten oder gar die Behandlung der topologischen Räume und ihrer Abbildungen vorziehen.

Damit würde zudem erreicht, daß die Schüler der Oberstufe ein wirklich abgerundetes Bild von der Menge der reellen Zahlen und ihrer Strukturen erhalten, wogegen im bisherigen Mathematikunterricht der Gymnasien lediglich sehr stark die algebraische Struktur von $\mathbb{R}$ und schwächer die Ordnungsstruktur betont worden sind.

1) Lenné, H.: a.a.O., S. 234

2) Lenné, H.: a.a.O., S. 233

Da "eine strenge Begründung der reellen Zahlen, die sowohl unter dem Gesichtspunkt der Fachlichkeit wie der strukturorientierten Allgemeinbildung gefordert wird"¹⁾ zu den Intentionen der gemäßigten wie der extremen Richtung der neuen Mathematikdidaktik gehört, zählt dieser Aspekt ebenfalls zu den Argumenten für die Beschäftigung mit der Topologie. Darüberhinaus ist unbestritten, daß auf der Basis der Behandlung der topologischen Räume und ihrer Abbildungen die Begriffe "Stetigkeit" und "Grenzwert" allgemeiner gefaßt werden können. Durch die Beschäftigung mit der Topologie würde man somit eine zusätzliche Vertiefung des Analysisunterrichts erreichen. Diese enge Bindung der Topologie zu einem Lehrstoff, dessen Platz unbestritten im Lehrplan für die Oberstufe ist, ist wiederum ein starkes Argument für die Topologie.

Bereits heute haben einige Begriffe aus der Topologie Eingang in den Analysisunterricht gefunden²⁾. Deshalb kann es nicht abwegig erscheinen, dem Schüler das ganze Gefüge darzustellen, aus dem diese Begriffe genommen sind.³⁾

1) Lenné, H.: a.a.O., S. 250

2) vgl. u.a. folgende Lehrbücher für den Analysisunterricht des Gymnasiums:
Kuypers, W. (Hrsg.): Mathematik für Gymnasien, Oberstufe, Analysis. Schwann-Verlag 1970
Lambacher-Schweizer: Mathematisches Unterrichtswerk Analysis. Klett-Verlag 1967
Winkler, E.: Einführung in die Infinitesimalrechnung. Ehrenwirth-Verlag 1964

3) In dem nachfolgend vorgestellten Lehrgang soll dies geschehen. Wie groß der Ausschnitt aus diesem Teilgebiet der Mathematik gewählt wird, dazu wird es vielerlei Meinungen geben. Die Aufgabe der kritischen Auseinandersetzung mit dem angebotenen Lehrgang vom Standpunkt der Didaktik aus wird es u.a. sein, zu überlegen, wie breit und tief der Ausschnitt aus dieser Wissenschaft - Ausschnitt muß ein solcher Lehrgang ja stets bleiben - gewählt wurde, und vor allem welche Gründe dazu bewogen haben.

Hinsichtlich der Beziehung der Topologie zur Analysis sollte man auch Überlegungen zur sogenannten "Epsilontik" anstellen, gerade weil es Stimmen gibt, die die Behandlung der mengentheoretischen Topologie bereits in die Sekundarstufe I aufgenommen sehen wollen, um die Analysis - speziell ihre Begriffe Stetigkeit und Grenzwert - ohne Gebrauch der "Epsilontik" behandeln zu können. Die letztere wird von den Schülern oft als schwierig angesehen.

Das Argument "Topologie in der Schule als Stütze der Analysis" muß aber stets im Zusammenhang mit den anderen bereits genannten Argumenten pro Topologie gesehen werden. Es soll hier also nicht vertreten werden, die Topologie *a l l e i n* um einer Fundierung der Grenzwert- und Infinitesimalrechnung willen in den Mathematikunterricht des Gymnasiums aufzunehmen. Würde man dieses Argument als das alleinige, das für die Topologie in der Schule spricht, vertreten, dann hätte man Einwänden "daß hier ... für die Mehrzahl der Schüler ... nur Präliminarien gelehrt werden, denn eine abstrakte, punktmengen-topologische Betrachtungsweise ist auch in den meisten Anwendungsbereichen von Mathematik nicht üblich"¹⁾ nicht viel entgegenzuhalten. Obwohl somit jedes einzelne hier aufgeführte Motiv zur Begründung eines Topologielehrgangs an der Schule für sich allein betrachtet Gegenargumente zuläßt, steckt die Überzeugungskraft in der *S u m m e* aller Motive. Die bisher genannten Motive sind: Vertrautmachen mit Axiomatik, vollständige Durchdringung der Struktur von $\mathbb{R}$, breite Fundierung der Infinitesimalrechnung. Ein weiteres Argument für die Behandlung der Topologie in der Schule liegt darin, daß

1) Lenné, H.: a.a.O., S. 264

mit ihrer Hilfe nun geometrische Begriffe, mit denen der Schüler bereits in der zurückliegenden Schulzeit umgegangen ist, im Gegensatz zum früheren Gebrauch auch losgelöst von der Anschauung behandelt werden. Es ist bekanntlich ein Wesenszug mathematischen Denkens, an die Stelle der bloßen Anschauung Logik und Deduktion treten zu lassen. Hierzu leistet die Topologie wichtige Dienste. Die Struktur des topologischen Raumes wird auf den Teilmengen einer Menge erklärt. Somit beschäftigt sich ein Topologie-Unterricht hauptsächlich mit Mengen. Genauer: der Schüler muß sich mit der Struktur in Mengen von Mengen auseinandersetzen. Dies stellt einige Anforderungen an sein mathematisches Denken. Dies stärkt aber andererseits sein Abstraktionsvermögen und bringt ihn weiter hinsichtlich eines der wichtigsten Ziele des heutigen Mathematikunterrichts: Der Schüler soll die Fähigkeit erwerben, die unterschiedlichsten Situationen mathematisieren zu können, seien sie nun der Technik, Wirtschaft, Medizin oder anderen Gebieten entnommen.

Das Stichwort "Mengen" führt zudem auf ein vordergründiges Argument, nämlich das, daß ein Topologie-Unterricht reichlich Gelegenheit böte, die heute vom Schuleintritt an gepflegte Mengenlehre so intensiv wie in keiner derzeit an der Schule gepflegten Disziplin¹⁾ einzusetzen. Man sollte auch bedenken, daß Beweise für Aussagen über Mengenbeziehungen sich wesentlich von den Beweisen unterscheiden, die der Schüler in der Elementargeometrie oder der schulischen "Algebra" kennenlernte (siehe meine Ausführungen S. 238). Ein Topologiekurs erbringt somit sozusagen en passant den Nutzen mit einem Beweistyp vertraut zu machen, der in der Mathematik eine wesentliche Rolle spielt.

1) außer der Boole'schen Algebra

Es ließe sich nun außerdem als Motiv für die Behandlung der Topologie in der Schule die dadurch gewonnene Vorbereitung auf ein späteres Mathematikstudium anführen. Dieses Argument soll jedoch bewußt ausgeklammert werden, da eine derartige Spezialisierung auf e i n späteres Studienfach im deutschen Schulwesen generell nicht vorgesehen ist.

Weitere Pro-Stimmen für eine Behandlung der Topologie auf der gymnasialen Oberstufe werden sich aufgrund der methodisch-didaktischen Konzeption des Lehrgangs finden. Der Lehrgang spricht verschiedene Fähigkeiten beim Schüler an, die nicht an ein einzelnes Stoffgebiet der Mathematik gebunden sind. Als Beispiel sei die logische Fähigkeit genannt, "die Negation einer Aussage formulieren zu können". Die Erzielung und Vertiefung solcher allgemeiner math. Fähigkeiten beim Schüler ist als Argument für einen Topologielehrgang zu werten. Dabei muß allerdings die zweiflerische Frage "Warum soll das Training dieser Fähigkeiten ausgerechnet durch Beschäftigung mit der Topologie geschehen?" mit der Frage "Warum nicht auch durch Beschäftigung mit Topologie?" entkräftet werden.

Das Denken in Strukturen, das Axiomatisieren, das Mathematisieren auch außermathematischer Zustandsgefüge, das Auffinden von Modellen zu vorgegebenen mathematischen Strukturen, das alles gehört heute zum vielbeanspruchten Handwerkszeug in den verschiedensten Wissenschaften - auch in nicht-naturwissenschaftlichen. Deshalb gehört ein strukturorientierter Mathematikunterricht unmittelbar zur Studienvorbereitung für beinahe jegliches Studium und auch zur Berufsvorbereitung für Berufe in Wirtschaft und Technik. Strukturorientierter Mathematikunterricht sollte dann aber auch die topologische Struktur nicht vernachlässigen.

Das überzeugendste Argument in der didaktischen Diskussion liefert wohl die Erprobung einer didaktischen Idee. Aus diesem Grunde wurde von mir ein Lehrgang konzipiert und als Wahlkurs zumindest an zwei Schulen abgehalten. Die Daten der Erprobung sollen im Anschluß soweit dargelegt werden, wie es für den außenstehenden Beobachter unbedingt nötig ist, sie zu kennen. Bevor dies geschieht, muß jedoch klargestellt

werden, daß hier nicht der Anspruch eines empirischen Beweisverfahrens erhoben wird; ein solches bedürfte einer Erprobung auf breiterer Basis.

Die Erprobung erfolgte im Rahmen von freiwilligen Wahlkursen.¹⁾ Diese Organisationsform mußte gewählt werden, da von den Pflichtstunden im Fach Mathematik (seien es in der Kollegstufe nun die eines Leistungskurses oder eines Grundkurses) nur höchstens einzelne hätten abgezweigt werden können. Das hätte aber bedeutet, daß man nur ein einzelnes Thema - exemplarisch aus dem Stoffkanon der Topologie herausgegriffen - hätte erproben können.²⁾ Mir schwebte jedoch vor, das gesamte von mir entworfene Schülerbuch der Kontrolle einer unterrichtlichen Erprobung zu unterwerfen. Durch verständnisvolle Förderung der Schulleitung und die kollegiale Unterstützung der dortigen Mathematiklehrer der Oberstufe gelang es mir zunächst am Gisela-Gymnasium in München, einem naturwissenschaftlichen Gymnasium mit Kollegstufeneinrichtung, einen Topologiekurs als freie Wahlgemeinschaft anzukündigen. Es konnten schließlich 16 Schüler aus allen 12. und 13. Klassen des Gymnasiums für den Kurs gewonnen werden, wovon allerdings, da der Besuch völlig freiwillig war, 5 Schüler nach einigen oder mehreren Kursstunden ausblieben. Zunächst war der Kurs nur für ein Semester (Winterhalbjahr) geplant. 8 der 11 ständigen Teilnehmer des Kurses wünschten ausdrücklich eine Verlängerung des Lehrgangs um ein Semester und blieben dann auch im Sommersemester treue Besucher. Der Kurs am Gisela-Gymnasium wird im folgenden immer Kurs I genannt.

1) im Schuljahr 1972/73

2) Vergleiche das Vorgehen in der Studie von Hlawka. Hlawka, E.: "Die mengentheoretische Topologie", in: Beiträge zur Lehrerfortbildung, Band 3: Mathematik. Wien 1971, S. 48-71

Keines der vorhandenen Bücher erschien mir unmittelbar und ohne Einschränkungen für Schülerhand geeignet. Das Buch von Papy¹⁾ entsprach nicht in allem meinen methodischen Vorstellungen und ist außerdem eine Mischung aus Lehrerhandbuch und Schülerbuch. Manche Abschnitte sind nur skizziert. Weiter paßte das Buch von Arnold²⁾ nicht zu dem Lehrgang "Mengentheoretische Topologie" wie ich ihn mir vorstellte. Es geht sehr stark auf die "anschauliche"³⁾ Topologie ein. 70 Seiten sind diesem Thema gewidmet und nur 38 Seiten der mengentheoretischen Topologie. Vom Methodischen her ist es dagegen für Schülerhand bedingt geeignet. Es wurde für College-Studenten des 2. Studienjahres geschrieben und stellt damit an unsere Oberstufenschüler doch beträchtliche Anforderungen, die jedoch mit Anstrengung durchaus zu bewältigen sind.

Als drittes näher in Betracht kommendes Werk ist das von Lipschutz⁴⁾ zu nennen. Es ist zwar insgesamt zu umfangreich, aber sein methodischer Aufbau würde Oberstufenschüler nicht zu sehr überfordern. Die Motivation für die Einführung neuer Begriffe sieht das Werk allerdings wie die meisten Studienbücher der Mathematik ausschließlich aus den mathematischen Erfordernissen. Die hauptsächlichste Hürde ist bei diesem Werk allerdings die englische Fassung. Deshalb halte ich das Werk nur für das zusätzliche vertiefende Studium geeignet. Hierbei müßte die Hürde der fremdsprachlichen Fassung eigentlich zu nehmen sein. Weitere Werke, die sich ebenfalls zum zusätzlichen Studium eignen wie z.B. Franz, Dieudonné,

1) Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysis-Unterrichts. Göttingen 1970

2) Arnold, B.H.: Elementare Topologie. Göttingen 1964

3) Bezeichnungen im Sinn des Titels des gleichnamigen Werks von Lietzmann, W.: Anschauliche Topologie, München 1965

4) Lipschutz, S.: Theory and problems of general topology, (Schaum's outline series). New York 1965

Alexandroff überfordern als Schülerbuch nach Umfang und Abstraktheit der Darstellung. Nach dieser negativen Bestandsaufnahme war es nötig, ein Schülerbuch (Skriptum) selbst zu entwerfen. Dies wurde getan und das entstandene Skriptum während des Kurses seitenweise an die Schüler dem fortschreitenden Stoff entsprechend ausgegeben.¹⁾ Das damalige Skriptum stimmt in groben Zügen mit dem in 2. abgedruckten Schülerbuch überein. Allerdings stellte sich heraus, daß da und dort Änderungen oder zusätzliche Erläuterungen nötig waren. So entstand das endgültige Schülerbuch. Im Lehrerbuch gehe ich auf die bedeutenderen Änderungen einzeln ein.

Zur Zeit, als im Gisela-Gymnasium der 2. Teil des Kurses I lief, startete eine zweite Erprobung am Bertold-Brecht-Gymnasium, München, einem sozialwissenschaftlichen Gymnasium. Dieser Kurs II setzte sich aus insgesamt 13 Schülerinnen zusammen. Davon waren nur 2 Schülerinnen aus der eigentlichen Kollegstufe (hier I, das entspricht schulstufenbezogen der Klasse 12). Alle anderen Teilnehmerinnen waren aus 11. Klassen. Der Stoff des Lehrgangs mußte für Kurs II stark gekürzt werden, da nur das Sommerhalbjahr zur Verfügung stand. Trotzdem kommt gerade dem Kurs II Bedeutung zu, da hier mit Schülerinnen gearbeitet wurde, die im üblichen Mathematikunterricht fast alle nur durchschnittliche oder sogar teilweise unterdurchschnittliche Leistungen aufwiesen, und die zudem naturgemäß weniger Vorkenntnisse aufwiesen als ältere Schüler oder gar solche aus einem naturwissenschaftlichen Gymnasium. Für die Durchführung des Kurses II war

1) Dies hat den Vorteil, daß ich durch zeitweiliges Zurückhalten der Skriptumsblätter eine Beweisidee diskutieren lassen konnte, ohne daß sich die Schüler unerlaubterweise im Skriptum darüber vorher informieren konnten.

neben der Kürze des Sommerhalbjahres¹⁾ ein Handicap, daß an der Schule, besonders in der Oberstufe, der Schulbesuch recht frei gehandhabt wird. So waren nur selten alle 13 Kursteilnehmerinnen anwesend, sondern der Besuch fluktuierte. Wollte man diese Ab-und-zu-Teilnehmerinnen nicht ganz verlieren, mußte man einen Modus zur Wiederholung des Stoffes finden, der gleichzeitig die Dauergäste nicht langweilte. Diese mehr pädagogisch-psychologischen Probleme und Erkenntnisse können im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht in ihren Einzelheiten berücksichtigt werden.

Die generelle Großzügigkeit im Schulbesuch kann aber andererseits auch als Plus wie als Herausforderung für den Lehrgang ins Feld geführt werden: Schülerinnen, die bereits den verpflichtenden Schulbesuch großzügig handhaben, werden keine Hemmungen haben, einer völlig freiwilligen Veranstaltung fernzubleiben. Kommen sie trotzdem, so kann man schließen, daß ihr Interesse geweckt ist und sie sich von der Form der Darbietung des Stoffes angezogen fühlen. Für Kurs II liegt nur ein ungefährer Überblick über die Leistungen im Fach Mathematik der Schülerinnen vor. Man kann sie durchschnittlich betrachtet als gut bis befriedigend (Tendenz nach unten) bezeichnen. Einige Schülerinnen gestanden frank und frei im Fach Mathematik "schlecht" zu sein.

Über Kurs I liegen mir genauere Informationen vor. Von den im 1. Semester verbliebenen 11 Teilnehmern hatten 4 die Note 1, 2 die Note 2, 3 die Note 3 und 2 die Note 4. Bei den nach wenigen Kursterminen ausgeschiedenen

1) Die Schülerinnen der 11. Klasse haben nach Pfingsten anstelle des Schulbesuches ein soziales Praktikum abzuleisten.

Schülern sieht die Verteilung so aus:

2 mit der Note 2, 1 mit der Note 3 und 2 mit der Note 4 im Fach Mathematik.¹⁾ Das zweite Semester setzte sich zusammen aus den Schülern mit der Note 1 (4 Schüler) sowie einem mit der Note 2, 2 Schülern mit der Note 3 und einem mit Note 4. Ausgeschieden waren dann je ein Schüler mit Note 2, 3 und 4.

Insgesamt kann man sagen, daß nicht nur die sogenannte "Elite" der Oberstufenschüler den freien Wahlkurs besuchte. Die 4 Schüler mit Note 1 waren allerdings als überdurchschnittlich mathematisch begabt zu bezeichnen. Da das Verhältnis 4 : 7 zwischen der Gruppe der Überdurchschnittlichen zur Gruppe der Durchschnittlichen bestand, kann man den Kurs I noch als ausgewogen hinsichtlich der Leistungsfähigkeit bezeichnen.

Für Kurs I hatte der Lehrgang insgesamt 16 Doppelstunden.²⁾ Die Unterrichtszeit war jeweils Freitag 14.50 Uhr bis 16.30 Uhr (einschließlich 10 Minuten Pause). Die verhältnismäßig geringe Anzahl von Doppelstunden kommt dadurch zustande, daß der Kurs bereits am 9. März endete.³⁾

Der Kurs II dauerte 9 Vollstunden. Zunächst war vorgesehen, jeweils Montag von 14 bis 15.30 Uhr eine Doppelstunde abzuhalten. Die Schülerinnen ließen jedoch nach 60 Minuten so sehr in ihrer Konzentration nach, daß ich mich aus pädagogischen Gründen auf 60 bis höchstens 70 Minuten je Kurstag beschränkte.

1) Bezogen auf das Endzeugnis des Jahres in dem der Kurs lief.

2) Ausgegangen wird von Schulstunden à 45 Minuten.

3) Die folgenden noch geplanten Kurstermine konnten zunächst wegen Erkrankung, dann wegen des Abiturs (Schlußklausuren) nicht mehr gehalten werden.

Die Organisationsform "freier Wahlunterricht" bedeutet, daß von den Schülern keinerlei häusliche Nacharbeit zu erwarten ist. Bei Kurs I konnte höchstens hie und da bei einzelnen Schülern der Ehrgeiz geweckt werden, zusätzliche Information einem Fachbuch¹⁾ zu entnehmen oder sich einen weiteren Beweis auszudenken. In beiden Kursen ist es mein subjektiver Eindruck, daß der Stoff summarisch betrachtet gut ankam.

1) Diese waren trotz Kollegstufeneinrichtung nicht in der Schulbibliothek für Schüler erhältlich, sondern mußten von mir gestellt werden.

1 Vorüberlegungen zum Entwurf eines Lehrgangs Topologie

Gerade da die mengentheoretische Topologie erst in ganz kleinen Ausmaßen in der Schule Fuß gefaßt hat¹⁾, erfordert der Entwurf und die Durchführung eines Lehrgangs zu dieser Thematik erhebliche Vorarbeit. Hier seien zunächst die Vorüberlegungen ausgebreitet, die mehr grundsätzlicher Art sind, während in § 3 (Lehrerhandbuch) die methodischen Detailfragen zu Wort kommen sollen. Die grundsätzlichen didaktischen Vorüberlegungen könnte man gliedern in solche, die auf das Was eingehen (Was will ich lehren?) und solche, die auf das Wie eingehen (Wie lehre ich es?). Bereits aus der Formulierung der Fragen wird deutlich, daß diese sich letztlich nicht trennen lassen. Vielmehr relativieren sich beide Fragen immer wieder gegenseitig, so daß die Lösung eines didaktischen Problems letztendlich nie möglich ist. Im Grunde würde noch eine dritte Frage in diesen Verband gehören, nämlich die nach dem Wo (Wo, d.h. in welcher Altersstufe lehre ich es?). Um schließlich überhaupt zu einem Diskussionsbeitrag zu kommen, müssen eine oder mehrere Setzungen vorgenommen werden, In der vorliegenden Arbeit wurde die Altersstufe als Setzung erachtet, nämlich die gymnasiale Oberstufe gewählt. Auch für das Was und Wie müssen einige Einschränkungen bereits von vornherein gemacht werden. Einige Diskussionspunkte zu diesen beiden Grundfragen müssen sozusagen exemplarisch herausgegriffen werden, da sich das Hin- und Herabwägen sonst ins Uferlose ausbreiten würde. Durch diese Beschränkung auf einige wenige Grundsatzerwägungen kam es zu den vier Abschnitten dieses Paragraphen.

1) Siehe dazu die Ausführungen im vorangegangenen Einleitungskapitel.

1.1 Gedanken zur Methodik der Einführung der Axiome und Definitionen

Bekannt man sich zu einem strukturorientierten Mathematikunterricht und erwägt man aus den in der Einleitung (0) dargelegten Gründen, mengentheoretische Topologie als abgeschlossene Disziplin in der Schule zu betreiben, so steht man als nächstes u.a. vor der Frage, wie der Weg zu den Axiomen und Definitionen dieser wichtigen mathematischen Theorie aussehen soll. Zur groben Unterscheidung der hierbei möglichen Vorgehensweisen verwendet die didaktische Literatur oftmals die Schlagworte "Induktion" und "Deduktion" oder die beiden Merksätze "Vom Speziellen zum Allgemeinen"¹⁾ und "Vom Allgemeinen zum Speziellen"²⁾.

An dieser Stelle soll keine prinzipielle Diskussion dieser beiden konträren methodischen Standpunkte vorgenommen werden. Es soll vielmehr individuell für den hier vorgestellten konkreten Lehrgang geschildert werden, welche grundsätzlichen Überlegungen der Wahl des gerade hier eingeschlagenen Weges zu den Axiomen und Definitionen vorausgingen.

Im Sinne oben beschriebener Unterscheidung gibt es einen dem deduktiven Vorgehen zuzuschreibenden methodischen Vorschlag, der zum Zweck des Kontrasts zunächst besprochen werden soll, auch wenn er für den vorliegenden Lehrgang u.a. aufgrund subjektiver Erfahrung aus meiner bisherigen Lehrtätigkeit nicht angenommen wurde. Das zur

1) Dieser Merksatz steht für die Bezeichnung "Induktion".

2) Dieser Merksatz steht für die Bezeichnung "Deduktion".

Diskussion gestellte methodische Vorgehen bei der Einführung des¹⁾ Axiomensystems der topologischen Räume besteht darin, das Axiomensystem ohne große Einleitung sozusagen als "Fertigprodukt" dem Schüler in die Hand zu geben. Im Anschluß wird dem Schüler dann an Beispielen vor Augen geführt, daß die Bezeichnung "topologischer Raum" für einige ihm bekannte Mengen vergeben werden kann, wenn man diese dadurch strukturiert, daß man jeweils in ihnen bestimmte Teilmengen gegenüber den anderen auszeichnet. Obwohl dieses Vorgehen weder im traditionellen Mathematikunterricht gewählt wird, noch von den noch so avantgardistischen Vertretern der Neuen Mathematik²⁾ in der Schule verfochten wird, soll der obige Vorschlag nicht zu rasch abgetan werden.

Gründe, die gegen diesen Vorschlag sprechen, sind:

- a) Ein Großteil der Schüler³⁾ wird von den rein abstrakt in der Sprache der Mengenlehre formulierten Axiomen, mit denen er unvorbereitet konfrontiert wird, überfordert sein. Dieser Meinung bin nicht nur ich anhand meiner Berufserfahrung, sondern sie wird von den Didaktikern⁴⁾ allgemein vertreten.

-
- 1) Der bestimmte Artikel bezieht sich darauf, daß aus den zur Grundlegung der Topologie möglichen verschiedenen Axiomensystemen zunächst eines ausgewählt worden ist, welches an den Anfang gestellt wird.
 - 2) Gebrauch der Bezeichnung wie bei Lenné, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland.
 - 3) Eine Ausnahme könnten Schüler bilden, die bereits einen Kurs in Boolescher Algebra hinter sich haben oder einen die Axiomatik betonenden Geometrikurs.
 - 4) Vgl. hierzu z.B. Äußerungen zur Einführung in die Gruppentheorie bei Steiner, H.G.: "Algebra im Unterricht der Oberstufe der Gymnasien" in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen 1967 und bei Kirsch, A.: "Endliche Gruppen als Gegenstand für axiomatische Übungen" in: Der Mathematikunterricht, Stuttgart Jg. 9 (1963), Heft 4

- b) Diese Verständnisschwierigkeiten können nur zum Teil auf das Konto einer trotz ihrer Verankerung im Lehrplan hier und da feststellbaren Vernachlässigung der Integration der Mengenlehre in die Schulmathematik geschrieben werden. Sie sind vor allem auch durch die bei dieser Einführung fehlenden Motivation des Schülers bedingt. Der Motivation durch Anschauung wird von der traditionellen wie von der neuen Mathematikdidaktik große Bedeutung beigemessen. Diese fehlt hier allerdings beim ersten Kennenlernen der Axiome. Die Axiome bekommen bei oben geschildertem Vorgehen erst nachträglich einen anschaulichen Hintergrund durch das an die Einführung anschließende Betrachten von Beispielen. Die Bedeutung der Motivation ist auch anhand von empirischen Versuchen der Lernpsychologie unbestritten und darf im mathematischen Lernprozeß ebenfalls nicht außer Acht gelassen werden.¹⁾
- c) Für den Teil der Schüler, die nicht überfordert sind²⁾, besteht bei obigem Vorgehen andererseits die Gefahr, daß im Ablauf des Kurses Routine das inhaltliche Erfassen überwiegt. Dies widerspricht dem Ziel der strukturorientierten Allgemeinbildung des Mathematikunterrichts und hat außerdem den Nachteil, daß die Routine schneller dem Vergessen unterliegt.

-
- 1) Eine aufschlußreiche wenn auch nicht vollständige Aufzählung von Möglichkeiten für Motivation bringt z.B. ein Aufsatz von Egsgard, J.C.: "Some Ideas in Geometry that can be taught from K-6" in: Educational Studies in Mathematics, vol 2, No. 4, 1970, S. 481 ff. Die englischen Formulierungen sprechen für sich: "(1) power prompted motivation" "(2) curiosity prompted motivation" "(3) motivation of freedom of choice".
- 2) Zukunftsvisionen könnten dahin gehen, daß die Anzahl dieser Schüler durch frühere Gewöhnung an Abstraktes ständig steigt. Hierin sollte man jedoch angesichts der viel zu geringen Stundenzahlen des Mathematikunterrichts nicht zu optimistisch sein.

Im Gegensatz zum oben geschilderten deduktiven Vorgehen, wobei den Schülern die Axiome ohne große Umwege vorgestellt werden, wird bei induktivem Vorgehen zunächst sorgfältig auf die Aussagen vorbereitet, die die Axiome bilden. Das geschieht, indem Gelegenheit geboten wird, an geeigneten Modellen Erfahrungen zu sammeln, die zusammengefaßt und verallgemeinert die Axiome bilden sollen.

Hier besteht zunächst die Frage nach den geeigneten Modellen zur Hinführung auf die Axiome. Das können zum einen mathematische Gefüge sein, die der Schüler aus dem bisherigen Mathematikunterricht kennt, z.B. Gebilde und Begriffe aus dem Mittelstufenunterricht, zum anderen "künstlich" geschaffenes "Anschauungsmaterial", das aus gedachten Objekten oder aus sinnlich erfaßbaren bestehen kann.

Wählt man das natürliche, weil vertraute "Anschauungsmaterial" zum Auffinden der Axiome oder Definitionen, so muß die meist starke "onthologische" Bindung der Begriffe berücksichtigt werden. Diese kann bei der Auffindung der Aussagen, die sich zu den Axiomen verdichten sollen, hinderlich sein. Die große Vertrautheit mit diesen Modellen verursacht die methodische Schwierigkeit, den Schüler dazu zu bringen, die ihm anschaulich vertrauten und dadurch selbstverständlich erscheinenden Tatsachen als bemerkenswert zu erachten. Zur angestrebten Verallgemeinerung der Aussagen sieht sich der Schüler erst veranlaßt, wenn er an Erfahrungen aus mehreren verschiedenen Modellen Gemeinsamkeiten erkennt und diese in eine allgemeine Aussage zusammenfassen will. Zusätzlich ist noch zu beachten, daß die "natürlichen" wie die "künstlichen" Modelle so gewählt werden, daß die Erfahrungen, die der Schüler an ihnen machen kann, ihm in etwa "gleichrangig" erscheinen.

"Gleichrangig" bedeutet hier nach sehr subjektiven Eindrücken gefühlsmäßig gleichrangig, also z.B. nach der Anschaulichkeit oder nach der darauf verwendeten Unterrichtszeit oder nach dem unterschiedlichen Grad der Formalisierung beurteilt. Sieht der Schüler nämlich die Erfahrung aus einem bestimmten Modell für gewichtiger an als Erfahrungen, die er daneben an anderen Modellen gewinnt, so ist er bestrebt, die Aussagen über die ihm nicht so gewichtig erscheinenden Erfahrungen in der "gewichtigeren" Aussage als Teilaspekt wiederzufinden und es ist ihm dadurch oftmals psychologisch der Weg zu einer allgemeineren Aussage, die beiderlei Aussagen übergreift, versperrt.

Aufgrund dieser Problematik, die den dem Schüler bekannten mathematischen Gebilden als Modellen anhaftet und auf Grund einer gewissen Unübersichtlichkeit, die manchen dieser anschaulich fundierten Modelle eigen ist¹⁾, neigt man²⁾ auch dazu, "künstliche" Modelle in den Unterricht einzubringen. "Künstlich" will ich die Modelle deshalb nennen, weil sie oft außermathematischen Hintergrund haben (wie man etwa an Steiners politischem Modell sieht³⁾) und weil sie noch nicht zu dem selbstverständlich gewordenen mathematischen Erfahrungsschatz des Oberstufenschülers gehören, sondern erst neu eingeführt werden müssen.

1) z.B. weil sie unendliche Mengen benützen.

2) Siehe z.B. Steiner mit seiner "Mathematisierung einer politischen Struktur". Steiner, H.-G.: "Verschiedene Aspekte der axiomatischen Methode im Unterricht" in: Les Repercussions de la Recherche Mathématique sur l'Enseignement, Luxemburg 1965

3) Steiner, H.-G.: a.a.O.

Gerade aus dem letzten Grund ist oft der zeitliche Aufwand für das Vertrautwerden mit dem "künstlichen" Modell relativ hoch. Dieser Gesichtspunkt ist gerade im Fall des vorgeschlagenen eventuell nur wöchentlich zweistündigen Topologie-Lehrgangs nicht unerheblich. Auch ist wiederum zu bedenken, daß der Schüler zur sachgebietsangepaßten wie auch zur strukturorientierten Beschäftigung mit dem Modell motiviert sein sollte, damit ein möglichst hoher Lernerfolg erzielt werden kann. Man wird in dieser Hinsicht verständlicherweise höhere Ansprüche an das künstliche "Anschauungsmaterial" als an das natürliche stellen.

Für den vorliegenden Topologiekurs konnte kein künstliches Modell für die Hinführung zu den Axiomen gefunden werden, das diesen Ansprüchen genügt. Ein mögliches künstliches Modell, das jedoch ausscheidet, wäre die endliche Menge der Schüler der Klasse, welche dadurch mit einer topologischen Struktur versehen wird, daß jedem Schüler sein Umgebungssystem durch Setzung beigegeben wird. Dieses Modell wird jedoch speziell auf Oberstufenschüler gewaltsam wirken. Es ist zur Hinführung auf die Axiome des topologischen Raumes nicht geeignet.

Im vorliegenden Lehrgang sollen die Axiome von vertrauten ("natürlichen") Beispielen ausgehend induktiv erschlossen werden. Auf welche Weise dies geschieht, wird zunächst grob in Kapitel 1.2 und später im einzelnen in Kapitel 3.1 auseinandergesetzt werden. Die Wahl des induktiven Vorgehens bleibt auch nicht auf die Einführung der Axiome beschränkt, sondern beeinflußt soweit möglich das methodische Vorgehen bei der Einführung jeder neuen Definition des Lehrgangs.

1.2 Die verschiedenen Axiomensysteme eines topologischen Raumes als methodisch-didaktisches Problem

Die didaktischen Vorüberlegungen in Kapitel 1.1 haben die Entscheidung zugunsten induktiven Erschließens der Axiome des topologischen Raumes im Schulunterricht ausfallen lassen. Damit teilen wir die Ansicht vieler Didaktiker wie etwa die Lietzmanns¹⁾, der sagt: "... darf in diesen Fällen die Axiomatik also nicht als 'Fertigfabrikat' auftreten, sondern ..." Nun stellt sich das didaktische Problem, daß es zur axiomatischen Grundlegung topologischer Räume mehrere gleichwertige Axiomensysteme gibt. Da jedes dieser Axiomensysteme für seine Einführung in der Schule spezifische methodische Probleme mit sich bringt, wird für den Einstieg in die Theorie der topologischen Räume die Wahl des Axiomensystems nicht unwesentlich sein.

Grundsätzlich muß man an ein Axiomensystem, das man im Schulunterricht verwenden will, die Forderung stellen, a) daß es sich einigermaßen motiviert einführen läßt, also dem Schüler plausibel erscheint²⁾, b) daß sich die Axiome übersichtlich und leicht faßlich darstellen lassen, damit sich der Schüler das Axiomensystem hinlänglich leicht merken kann, und c) daß es handlich in der Anwendung ist, denn sonst sind die Möglichkeiten seiner Verwendung zum Aufbau einer ganzen Theorie in der Schule doch sehr eingeschränkt.

-
- 1) Lietzmann, W.: Methodik des Mathematischen Unterrichts, Heidelberg 1968, S. 56
- 2) Dies ist freilich auch wesentlich vom methodischen Vorgehen bei seiner Einführung abhängig.

Diese Kriterien werden im folgenden auf drei verschiedene Möglichkeiten der axiomatischen Grundlegung eines topologischen Raumes, nämlich die mittels des Hausdorffschen Axiomensystems, des Kuratowskischen Axiomensystems und des Axiomensystems (01), (02), (03) ¹⁾, angewendet.

1) Das Axiomensystem, das sich der offenen Mengen bedient, siehe S. 32!

1.2.1 Methodische Bedeutung des Axiomensystems von Hausdorff

Ein Teil der Bücher über mengentheoretische Topologie - diese Bücher sind für die Hand des Mathematikers bzw. Mathematik-Studenten gedacht - geht von den Hausdorff'schen Axiomen aus:

Eine Topologie $\mathcal{T}$ über einer Menge M ist dadurch definiert, daß jedem Element p von M eine Menge $\mathcal{U}(p)$ von Teilmengen von M zugeordnet ist, das folgenden Axiomen genügt:

- (U1) $\mathcal{U}(p) \neq \emptyset$ für alle $p \in M$
Und für alle $U \in \mathcal{U}(p)$ gilt: $p \in U$
- (U2) Wenn $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(p)$, so existiert ein $V \in \mathcal{U}(p)$,
so daß $V \subseteq U_1 \cap U_2$
- (U3) Zu $U \in \mathcal{U}(p)$ gibt es ein $V \in \mathcal{U}(p)$, so daß
 $U \subseteq \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$

Die Elemente von $\mathcal{U}(p)$ heißen dann Umgebungen des Punktes p .

Ein Axiomensystem, das auf dem Umgebungsbegriff aufbaut wählen Hahn, Ellers, Dzewas¹⁾ in ihren Vorschlägen²⁾ zur Einführung des Filterbegriffs. Sie bringen den Begriff des Filters, speziell den des Umgebungsfilters, und schaffen sich so ein Instrument zur Verallgemeinerung des Konvergenzbegriffs. Dies bringt mit sich, daß - so

-
- 1) Hahn, O., Ellers, E., Dzewas, J.: "Eine Einführung in die Analysis mittels des Filterbegriffs", Teil I und Teil II, in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn, Band 13/ 1960/61, S. 432-448 und Band 14/1961/62, S. 342-355
 - 2) Vorläufer dieser Vorschläge gibt es z.B. von Griesel und Pickert; Griesel, H.: "Von den Folgen zu den Filtern" in: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte Göttingen, VI (1958)
Pickert, G.: "Folgen und Filter in der Infinitesimalrechnung" in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn, Band 13/1960/61, S. 150-153

zeigt auch die inhaltliche Beschreibung des Lehrgangs - sehr viel mit Mengen umgegangen werden muß, deren Elemente selbst wieder Mengen sind. Die dabei auftretenden methodischen Probleme werden leider in den genannten Aufsätzen (S. 25, Fußnote 2) nicht angesprochen.

Ein wichtiger Gesichtspunkt der realen Einbeziehung des obigen Axiomensystems in den Schulunterricht ist die Frage: "Lassen sich diese Axiome induktiv erschließen, also an Beispielen 'entdecken'?" Ein naheliegendes Beispiel ist die Menge der offenen Intervalle der Zahlengeraden, die einen Punkt p ¹⁾ enthalten. Ein weiteres ist die Menge der offenen Kreisscheiben der Ebene mit Zentrum p . Vom umgangssprachlichen Gebrauch des Wortes Umgebung her erscheint es plausibel, den Intervallen und den Kreisscheiben die Bezeichnung "Umgebung des Punktes p " zu geben. Dieser Plausibilität tut es auch keinen Abbruch, wenn p nicht mehr das Zentrum des Intervalles oder der Kreisscheibe ist. Die umgangssprachliche Bindung des Wortes Umgebung stellt andererseits auch wiederum ein kleines Hindernis für die mathematische Begriffsbildung dar. Sagen wir nämlich "die Umgebung von München", so gehört für uns München selbst nicht zu dem bezeichneten Gebiet. Der mathematische Begriff Umgebung meint jedoch üblicherweise, daß der Punkt p zu seiner Umgebung gehört, andernfalls wird die Bezeichnung "punktierte Umgebung" gebraucht. Die Wirkung dieser umgangssprachlichen Bindung beschreibt Pietzsch²⁾ in seiner Untersuchung über die Grundlegung des Grenzwertbegriffs in den Klassen 5 bis 8. Auch Papy ist sich dieser Bindung bewußt³⁾. Obwohl beide Autoren mit Kursteilnehmern arbeiteten, die wesentlich

1) Hier wie in § 2 werden Punkte mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

2) Pietzsch, G.: Zum Grenzwertproblem. Berlin 1967, S. 42

3) Vgl. Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysisunterrichts, Göttingen 1970, S. 83

jünger waren als die des vorliegenden Lehrgangs, sollte man deren Erfahrungen nicht außer acht lassen. Pietzsch stellt z.B. auch fest, daß es vom umgangssprachlichen Sinn her näherliegender sei, die offenen Intervalle und Kreisscheiben als Umgebungen zu bezeichnen, als die abgeschlossenen Intervalle und Kreisscheiben. Mit Umgebung verbindet der Laie die Vorstellung von einem geometrischen Gebilde ohne feste Umrisse, dies entspricht am ehesten einer Punktmenge, zu der die Randpunkte nicht gehören, also einer offenen Menge.

Nachdem somit das nächstliegende mathematische Beispielmateriale gefunden ist, bleibt die Frage, ob es wirklich geeignet ist, die Axiome (U1), (U2), (U3) zu entdecken.

Bei Axiom (U1) liegt für den Schüler die Schwierigkeit darin, es als bemerkenswert zu erkennen. Ist es vorgegeben, so sieht der Schüler sofort ein, daß (U1) z.B. für die Menge aller offenen Intervalle, die einen gegebenen Punkt p enthalten¹⁾, gilt und ebenso in der Ebene für die Menge aller offenen Kreisscheiben, die einen Punkt p enthalten¹⁾, Angeregt vom Beispiel der Menge aller offenen Intervalle in $\mathbb{R}$, die einen Punkt p enthalten, werden die Schüler eventuell versucht sein, anstelle von (U2) die allgemeine Aussage: "Für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(p)$ gilt $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(p)$ " aufzustellen. Für die Menge aller offenen Kreisscheiben, die einen Punkt p enthalten, gilt dies jedoch nicht, sondern nur die Aussage (U2). (U3) ist dasjenige von den drei Axiomen, das am schwersten für den Schüler ohne Hilfe aufzufinden ist. Hier muß der Lehrer lenkend eingreifen. Ist die Aussage (U3) einmal ausgesprochen, so sieht der Schüler allerdings ihre Gültigkeit für die Menge von offenen

1) p soll nicht als Zentrum der Kreisscheiben vorausgesetzt werden.

Intervallen und die Menge von offenen Kreisscheiben leicht ein. Ein Motiv dafür, die Aussage (U3) zu formulieren, sieht der Schüler zu diesem Zeitpunkt allerdings noch nicht.

Zu diesen Hürden bei der induktiven Hinführung auf die Hausdorffschen Axiome kommt hinzu, daß sie für die Konstruktion endlicher Modelle unhandlich sind. Hat man das Axiomensystem einmal eingeführt - auf welche Weise auch immer - so ist es nicht zu umgehen, daß man außer den bekannten Räumen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ auch solche Modelle zur Verfügung haben möchte, die völlig von der Anschauung losgelöst sind. Solche Modelle können z.B. auf endlichen Mengen konstruiert werden. Hierzu muß zu jedem Punkt der Menge eine Menge von Teilmengen zusammengestellt werden, die den Axiomen (U1), (U2), (U3) genügt. Dabei müssen außerdem wegen (U3) diese Mengen, die den einzelnen Punkten beigegeben werden, aufeinander abgestimmt werden. Dies ist kein einfaches Unterfangen.

Aus den genannten Gründen soll das Hausdorffsche Axiomensystem für den vorliegenden Kurs nicht als Axiomensystem dienen, auch wenn es insbesondere für das Kapitel "Konvergenz" bequem wäre, den Umgebungsbegriff als den zentralen Begriff gewählt zu haben.

1.2.2 Methodische Bedeutung des Axiomensystems von Kuratowski

Als weitere Möglichkeit der axiomatischen Begründung der topologischen Räume bietet sich das Axiomensystem von Kuratowski an:

Gegeben sei eine Menge M . M heiße ein topologischer Raum, wenn jeder Teilmenge A von M eine Teilmenge $\bar{A}$ von M so zugeordnet ist, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(K1) \quad \bar{\emptyset} = \emptyset$$

$$(K2) \quad A \subseteq \bar{A}$$

$$(K3) \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$(K4) \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Ein Lehrgang, der obiges Axiomensystem an den Anfang stellt, wurde von Jahner durchgeführt. Sein Vorgehen kann nachgelesen werden in dem Aufsatz: "Ein topologischer Weg zum Satz über die Annahme von Grenzen bei stetigen Funktionen"¹⁾. Jahner meint dort: "Der folgende Unter-richtsweg beginnt mit den Hüllenaxiomen von Kuratowski, da m.E. der Begriff des 'Randes' von der Anschauung her besser präzisiert werden kann als der Begriff 'offene Menge'". Jahner wählt für seine Hinführung zu den Axiomen Punktmengen der Ebene. Er läßt den Schüler zunächst am Begriff "Rand einer Punktmenge" an der elementargeometrischen Bedeutung des Randes zweifelnd werden. Zu diesem Zweck legt er zwei Kreisscheiben vor, eine offene und eine, zu der zwar die Punkte der oberen Hälfte der Kreislinie aber nicht die der unteren gehören sollen.

1) Jahner, H.: "Ein topologischer Weg zum Satz über die Annahme der Grenzen bei stetigen Funktionen", in: Der Mathematikunterricht, Stuttgart 18/1972/3, S. 27-41

Für beide Mengen soll der Rand angegeben werden. Als Ersatz für den scheinbar unbefriedigenden Begriff Rand wird der Begriff Hülle einer Menge¹⁾ gegeben. Die Zuordnung "Menge $\mapsto$ berandete Menge" ($A \mapsto \bar{A}$) heißt bei Jahner "Berandung". Im Anschluß werden die allgemeinen Eigenschaften der Berandung gesucht, also die Hüllenaxiome. Ziel ist, (K1) bis (K4) aufzufinden. Beim Auffinden besonders von (K1) und (K4) wird der Lehrer stark lenkend eingreifen müssen, was der Autor verschweigt. Für die Eigenschaften (K3) und (K4) wird an skurrilen "Berandungsvorschriften", die diese Eigenschaften gerade nicht aufweisen, demonstriert, daß sie für eine "Berandung" plausiblerweise zu fordern sind.

Obwohl die Hinführung auf die Axiome somit nicht bis in alle Einzelheiten dem Ideal des induktiven Hinführens entspricht, muß man anerkennen, daß der Autor sehr überzeugende Modelle für die Axiome nach deren Einführung zu nennen weiß. Alle Beispiele beziehen sich auf den Raum $\mathbb{R}$. Die genannten Berandungsvorschriften wird der Schüler wohl nur mit Hilfe des Lehrers auffinden, dann aber sind sie für ihn sehr einsichtig.

Für endliche Mengen gilt, wie in 1.2.1 für das Hausdorffsche Axiomensystem dargelegt, daß die Konstruktion von topologischen Räumen auf ihnen mit Hilfe der Kuratowskischen Axiome mühsam ist. Jeder Teilmenge der gegebenen endlichen Menge muß eine andere (nicht notwendig verschiedene) Teilmenge so zugeordnet werden, daß (K1), (K2), (K3) und (K4) gilt.

Aus obigen Gründen hat auch das Kuratowskische Axiomensystem für die schulische Einführung der topologischen

1) Die abgeschlossene Hülle einer Menge heißt bei Jahner "berandete Menge".

Räume Nachteile. So bleibt noch das auf den offenen Mengen begründete Axiomensystem zu untersuchen.¹⁾

1) Das auf den abgeschlossenen Mengen aufbauende Axiomensystem wird nicht eigens besprochen, da es zu dem der offenen Mengen dual ist und somit dieselben methodischen Aussagen zu machen wären. Die Axiomensysteme, die auf dem Inneren oder dem Äußeren oder dem Rand einer Menge aufbauen, bleiben aus dem Grund unberücksichtigt, weil sie dieselben methodischen Probleme wie die Kuratowskischen Axiome aufwerfen würden.

1.2.3 Methodische Bedeutung des Axiomensystems (01)
bis 03)

Als dritte Alternative sei das Axiomensystem, das auf dem Begriff "offene Menge" aufbaut, auf seine Eignung für die axiomatische Grundlegung der Topologie in der Schule hin untersucht.

Das Axiomensystem hat folgende Form:

Eine Menge M und eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ heißen topologischer Raum, wenn gilt:

$$(01) \quad \emptyset \in \mathcal{T} \quad \text{und} \quad M \in \mathcal{T}$$

$$(02) \quad \mathcal{M} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{T}$$

$$(03) \quad \mathcal{M} \in \mathcal{T} \wedge \mathcal{M} \text{ endlich} \Rightarrow \bigcap \mathcal{M} \in \mathcal{T}$$

Auf dieses Axiomensystem kann wie folgt induktiv hingeführt werden.

Es werden Punktmengen zusammengestellt, in Verbindung mit denen der Schüler das Adjektiv "offen" bereits in seiner bisherigen Schulzeit verwendet hat bzw. in Verbindung mit denen ihm die Verwendung des Adjektivs "offen" sinnvoll erscheint, weil sie analog zur bekannten Verwendung erfolgt. Nun liegen dem Schüler also die Mengen der offenen Intervalle, der offenen Kreisscheiben und die der offenen Kugeln vor. Aber auch offene Quadrate und offene Würfel usw. versteht und definiert der Schüler intuitiv so wie es für den weiteren Ablauf richtig ist. Nun sind jedoch die Mengen der offenen Intervalle, der offenen Kreisscheiben und die der offenen Kugeln noch keine Topologien, vielmehr handelt es sich hierbei ja bekanntlich jeweils um eine Basis der natürlichen Topologien von $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ bzw. $\mathbb{G}$. Es muß deshalb zunächst ohne Zwang auf diejenigen Definitionen offener Mengen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ bzw. $\mathbb{G}$ hingeführt werden, die sich

dieser Erzeugendensysteme bedienen. Wir erhalten die entsprechenden Definitionen offener Mengen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{J}$ und $\mathcal{G}$. Da sich die Punktmengen, die bisher mit dem Adjektiv "offen" belegt worden waren, auch nach diesen neueingeführten Definitionen als offene Mengen herausstellen, werden die Definitionen als plausibel anerkannt.

Damit haben wir auf induktivem Weg drei Mengen offener Mengen eingeführt. Sie dienen im folgenden dazu, die Eigenschaften (O1), (O2), (O3) als Eigenschaften zu entdecken, die diesen drei Mengen gemeinsam sind. Mengen von Teilmengen einer gegebenen Menge, die diese drei gefundenen Eigenschaften aufweisen, bekommen eine eigene Bezeichnung: Topologie. An einem Beispiel wird entdeckt, daß zu einer Menge unschwer mindestens eine solche "Topologie" gefunden werden kann. Damit ist der Zeitpunkt für das Aufstellen des Axiomensystems eingetreten.

Anschließend können zu vorgegebenen Mengen viele Topologien konstruiert werden, da das Axiomensystem (O1), (O2), (O3) sehr handlich ist. Für die Einführung weiterer Begriffe in der Theorie der topologischen Räume ist es - von der Didaktik her gesehen - unbedingt nötig, daß der Schüler viele Beispiele topologischer Räume zur Verfügung hat.

Man mag als Nachteile dieser Hinführung auf dieses Axiomensystem anführen, daß die drei anfangs zur Verfügung stehenden topologischen Räume einander zu ähnlich seien. Dies macht es nötig bei der Entdeckung der drei Eigenschaften (O1), (O2) und (O3) lenkend einzugreifen (genauere Ausführungen, was hier unter "gelenktem Entdecken" verstanden werden soll, siehe S. 46 ff!)

Dies wird jedoch durch den Vorzug dieses Axiomensystems aufgewogen, daß die Axiome leicht einpräglich sind und ihre Handhabung zur Herstellung von Beispielen für topologische Räume einfach ist.

Aus diesem Grunde entschied ich mich dafür, dieses Axiomensystem an den Anfang meines Topologie-Lehrganges zu stellen.

1.3 Lernziele des Lehrgangs

Da zur Behandlung der Topologie in der Schule - soll sie als eigenes Teilgebiet der Mathematik gelehrt werden - nur höchstens 40 Stunden à 45 Minuten zur Verfügung stehen¹⁾, können unmöglich alle Themen der Topologie abgehandelt werden. Eine Beschränkung ist unbedingt notwendig. Diese kann freilich nicht willkürlich geschehen. Wie bei jeder Stoffauswahl werden auch hier reifliche Überlegungen vorausgehen müssen, welche hauptsächlichen Lernziele²⁾ man beachtet wissen will. Das Ergebnis dieser Überlegungen wird die Auswahl der Themen für einen Topologie-Kurs der Schule bestimmen und ferner beeinflussen, wie breit die einzelnen Themen dargestellt werden.

Die Formulierung der Grobziele wird wiederum wesentlich von der Beschaffenheit des Adressatenkreises bestimmt sein, den man sich für einen Topologiekurs vorstellt. Hier wollen wir uns den Spielraum 11. Klasse bis 13. Klasse wählen, für die Kollegstufeneinrichtung bedeutet dies einen Spielraum Kollegstufe I oder II. Was allgemein für den Adressatenkreis der Leistungskurse der Kollegstufe im Lehrplan steht, kann d a n n für den eines Topologiekurses übernommen werden:

"Der Besuch des Leistungskurses Mathematik ist nicht nur solchen Kollegiaten anzuraten, die Mathematik in größerem Umfang im Studium benötigen, sondern jedem, der für die Mathematik so viel Interesse und Verständnis auf-

1) Dabei gehe ich davon aus, daß ein volles Schuljahr (also in der Kollegstufe 2 Semester) zur Verfügung steht. Man bedenke jedoch, daß die schriftlichen Arbeiten des Abiturs das Sommerhalbjahr beträchtlich verkürzen.

2) Hier soll eine sogenannte "Grobzielbeschreibung" vorgenommen werden. Die Bezeichnung "Grobziele" geht auf Möller zurück. Vgl. Möller, Ch.: Technik der Lehrplanung. Methoden und Probleme der Lernzielerstellung. Weinheim 1973

bringt, daß er im Umgang mit den Methoden und Denkweisen dieses Faches wissenschaftliche Studierfähigkeit zu erwerben vermag."¹⁾ Wird der Adressatenkreis so charakterisiert, so müssen auch in methodischer Hinsicht die Vorschläge desselben Lehrplans berücksichtigt werden: "Bei der Auswahl der Stoffe und der Art ihrer Behandlung kann es nicht darum gehen, das Anspruchsniveau eines späteren Mathematikstudiums vorwegzunehmen. Die geforderten Lernziele und Lerninhalte sollen lediglich die Verständnisbasis schaffen, die für das Studium der Mathematik, aber auch für ein anderes wissenschaftliches Studium vorausgesetzt werden muß."²⁾

In modifizierter Form gelten deshalb die in eben dem Lehrplan genannten globalen Lernziele, die dort allgemein für alle Leistungskurse des Mathematikunterrichts der Kollegstufe ausgesprochen sind, auch für einen Topologiekurs:

- a) Vertiefte Einsicht in den logischen und systematischen Aufbau der Mathematik
- b) Kenntnis der grundlegenden Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft
- c) Sicherheit in der Anwendung der erarbeiteten mathematischen Methoden
- d) Einblick in problemgeschichtliche Zusammenhänge sowie Verständnis für die Grenzen mathematischen Denkens."³⁾

Die aufgeführten Lernziele interpretiere ich für einen Topologiekurs wie folgt:

-
- 1) vgl. Schulreform in Bayern, Band 2, Kollegstufe am Gymnasium, München 1972, Herausgegeben vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus, S. 175
 - 2) Schulreform in Bayern, Band 2, München 1972, S. 175
 - 3) Schulreform in Bayern, Band 2, München 1972, S. 175

a) Dieses allgemeine Lernziel diene bereits als Argument für die Übernahme der Topologie in die Schulmathematik. Es sagt aber zudem auch aus, wie diese Übernahme aussehen soll. Um vertiefte Einsicht in den Aufbau der Mathematik beim Schüler zu erreichen, sollte die dritte der drei Grundstrukturen (nach Bourbaki: algebraische Strukturen, Ordnungsstrukturen, topologische Strukturen) dem Schüler ebenfalls vertraut gemacht werden. Für vertiefte Einsicht genügt es nicht, Überblickhaft die wichtigsten Begriffe und Aussagen der Topologie nur kurz und oberflächlich sichtbar werden zu lassen. Es muß stattdessen angestrebt werden, ein abgerundetes Bild von größtmöglicher Tiefe von der Disziplin Topologie beim Schüler entstehen zu lassen. Bei der Fülle des Stoffes wird man deshalb teilweise das Prinzip des Exemplarischen befolgen müssen. Hier droht jedoch das Mißverständnis, die Auswahl falsch anzustellen und ein "Raritätenkabinett" aus der Topologie zu machen. Dies würde jedoch der Forderung a) widersprechen, die den Einblick in den systematischen Aufbau der Mathematik an erste Stelle setzt.

Zur Erreichung des Ziels a) genügt es auch nicht, die Topologie isoliert vom bisherigen Stoffkanon der Schulmathematik zu betreiben. Es müssen in jedem Fall die vielfältigen Verbindungen zum bisher Gelernten sichtbar werden, insbesondere wird es die Analysis sein, in die nun mit Hilfe der Topologie zusätzlich vertiefte Einsicht beim Schüler heranreifen soll.

Waren die genannten Zielsetzungen auf den Einblick in den systematischen Aufbau der Mathematik im Großen aus-

gerichtet, so verstehe ich Ziel a) zusätzlich auch so, daß der logische und systematische Aufbau im Kleinen vor Augen geführt werden soll, also das, was die Didaktiker unter "lokalem Ordnen" verstehen. Einsichten in das lokale Ordnen können auf mehrere Arten gewonnen werden. Für die Topologie kann dies z.B. dadurch angestrebt werden, daß die Äquivalenz der verschiedenen Axiomensysteme sichtbar gemacht wird. Dieses Ziel würde - aus Zeitgründen - mit dem Ziel der möglichst weitgehenden Vollständigkeit des Einblicks in die Topologie konkurrieren und muß deshalb zurückstehen. Das lokale Ordnen kann andererseits in einem Topologiekurs an Gefügen von aufeinander bezogenen Sätzen vor Augen geführt werden.¹⁾

b) Zwar ist die Topologie ein Gebiet der reinen Mathematik, doch haben sich ihre Ergebnisse auf die angewandte Mathematik ausgewirkt; z.B. ist die Topologie von wesentlicher Bedeutung für die Funktionalanalysis und diese liefert Lösungswege für bestimmte Probleme der angewandten Mathematik. Ein Topologiekurs sollte dem Schüler deshalb einen Einblick in die Verflochtenheit der reinen Mathematik mit der angewandten Mathematik am Beispiel der Topologie geben. Diese Aufgabe wird allerdings vom Lehrer, der den Kurs abhält, gelöst werden müssen.

1) Als Beispiel diene Kapitel 2.4.1 des Schülerbuches

Ziel c) erlaubt zweierlei Interpretationen, die beide für die Topologie relevant sind. Zum einen kann die Sicherung früher gelernter mathematischer Methoden gemeint sein, zum anderen aber auch Methoden, die innerhalb des Kurses neu zu erarbeiten sind. Für wichtiger halte ich in diesem Zusammenhang die Sicherung der "alten" Fertigkeiten. Sie wird im Topologiekurs außer durch Übung dadurch angestrebt, daß die Inhalte, die hinter den Methoden stehen, vertieft werden. Durch erneute Beschäftigung mit ihren Methoden können z.B. die Fertigkeiten auf dem Gebiet der Mengenlehre und Logik gesichert werden. Hierher gehören auch der Gebrauch der Quantoren und die Technik der Negation von Aussagen, die Quantoren aufweisen, ferner der richtige Symbolgebrauch und vor allem alle Fertigkeiten, die mit dem Beweisen zusammenhängen (Erkennen der Beweisvoraussetzung, Auswählen aus äquivalenten Behauptungen, richtiger Gebrauch der Schlußweise, Vermeiden von Ringschlüssen, usw.) Die augenfälligste Vertiefung erfahren in einem Topologiekurs die Begriffe und Methoden der Analysis. Dieses Ziel ist auch im Hinblick auf Ziel a) von großer Bedeutung. Hierbei wird die Sicherung nicht durch abermalige Anwendung der in der Differentialrechnung gewonnenen Fertigkeiten erreicht, sondern durch inhaltliche Vertiefung der Begriffe. Nimmt man Forderung c) ernst, so ist darauf zu achten, so oft wie möglich Querverbindungen zu den anderen Disziplinen der Schulmathematik herzustellen. Dies dient dann zudem der Zielsetzung a).

Bereits bei der Ausgestaltung der Zielsetzungen a), b), c) war zu erkennen, daß diese sich teilweise überschneiden.

Ziel d) berührt seinerseits wiederum a) und b). Bei der Interpretation von d) sollte man beachten, daß es darin nicht heißt "mathematikgeschichtliche" sondern "problem-

geschichtliche Zusammenhänge". Als Beispiel können die Etappen auf dem Weg zur Verallgemeinerung des Begriffes Raum dienen. Zu d) gehört auch, daß man im Mathematikunterricht an ausgewählten Beispielen sichtbar werden läßt, wie das Auffinden mathematischer Aussagen vor sich gehen kann. In diesem Zusammenhang kommt es nicht darauf an, daß jene Aussage auch historisch gesehen gerade so gewonnen wurde. Ein Detailthema zum Ziel d) ist etwa das Problem der Metrisierbarkeit von topologischen Räumen. Hiermit kann dem Schüler eine Frage vorgestellt werden, deren Beantwortung den Mathematikern erst in jüngster Zeit¹⁾ gelungen ist. Der Schüler sollte von der Mathematik als Wissenschaft den Eindruck einer lebendigen Wissenschaft erhalten und nicht den Eindruck eines bereits abgeschlossenen Wissensgebietes.

Neben den Zielen a) bis d) hat auch ein Topologiekurs wie der Mathematikunterricht insgesamt die pädagogische Aufgabe, beim Schüler Fähigkeiten heranzubilden, die sich auch auf andere Gebiete als das eigentliche mathematische Handeln auswirken. Eine solche Fähigkeit sei stellvertretend für viele genannt: die Fähigkeit unvoreingenommen aus bestimmten vorgegebenen Annahmen Folgerungen zu ziehen. Durch Beschäftigung mit axiomatisch begründeten Teilgebieten der Schulmathematik, wie etwa der Topologie, kann der Schüler diese Fähigkeit erwerben oder vervollkommen.

Betrachtet man die Gliederung des Schülerbuches (siehe 2.!) so stellt man fest, daß jedes der dort aufgeführten Themen seine Berechtigung aus mindestens einem der Punkte a) bis d) folgern kann. Was aber ist mit den fehlenden Themen? Als Beispiele seien die Begriffe "Spur-

1) Mathematical Reviews, Vol. 12, New York 1951, S. 845: Hinweis auf die Arbeit von Smirnov, Yu.: "A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space", in: Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 77, S. 197-200 (1951)

topologie" und "kompakte Menge" genannt. Warum werden diese Themen in dem vorliegenden Kurs nicht behandelt? Widersprechen Sie etwa den Zielen a) bis d)? Dies muß verneint werden. Es gilt jedoch zu bedenken: Da die Beschränkung der Themen aus den eingangs genannten Gründen nötig ist, wurde die Entscheidung für die Aufnahme eines Themas in den Kurs danach getroffen, welche Themen die Maximalzahl der angegebenen Ziele abdecken und zwar dies wiederum in optimaler Weise.

1.4 Methodische Grundgedanken zum Lehrgang

Bei den in 1.2 geschilderten inhaltlichen Zielen ist es im vorliegenden Kurs das methodische Ziel, die Kreativität des Schülers anzuregen und in ihm eine bleibende Sympathie für die Mathematik wachzurufen. Diese Hauptziele bewirken wiederum eine Reihe von Einzelzielen, die in den folgenden drei Abschnitten angesprochen werden.

1.4.1 Das Problem der Vorkenntnisse

Folgende Vorkenntnisse wären wünschenswert:

- 1) Der Gebrauch der Begriffe aus der Mengenlehre sollte geläufig sein, und der Schüler sollte die wichtigsten Aussagen über Mengenverknüpfungen kennen. Das Umgehen mit der Potenzmenge sollte ihm vertraut sein, und er sollte keine Schwierigkeiten in der Handhabung einer Menge haben, deren Elemente selbst wieder Mengen sind.
- 2) Die allgemeine Definition des Abbildungsbegriffs sollte bekannt sein, um auch über Abbildungen sprechen zu können, deren Definitionsmenge nicht $\mathbb{R}$ ist. Die Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv sollten mit Hilfe mengentheoretischer Begriffe erklärt und an allgemeinen Beispielen erkannt werden können. Günstig wäre es, die Begriffe "Bild einer Menge ¹⁾" und "Urbild einer Menge ¹⁾" zur Verfügung zu haben.
- 3) Mit dem Begriff Folge sollte der Schüler die Vorstellung einer Abbildung der Menge $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$ oder einer anderen Bildmenge verbinden.
- 4) Ideale Voraussetzungen würden auch Vorkenntnisse über Isomorphie sein. Die Kenntnis anderer Strukturen wie

1) bei einer Abbildung f

Gruppe oder Verband könnten günstige Vorbedingungen für die Einführung der topologischen Struktur schaffen.

5) Klare Kenntnisse über Konvergenz und Stetigkeit sind wünschenswert.

6) Aus dem Gebiet der Logik sollte vor allem der richtige Gebrauch der Quantoren, sowie der Schlußweisen zu den Fertigkeiten des Schülers gehören.

Diese Liste von wünschenswerten Vorkenntnissen muß mit der Realität verglichen werden, also danach gefragt werden, mit welchen dieser Vorkenntnisse kann in welchem Umfang gerechnet werden. Geht man in diesem Sinne daran, Bilanz zu ziehen, so sollte man sich nicht ausschließlich auf den Lehrplan des Gymnasiums beziehen. Freilich sind hierin¹⁾ Forderungen nachzulesen, die die Punkte 1), 2), 3) und 5) abdecken. Dies berechtigt jedoch zur Zeit noch nicht²⁾, generell eine tatsächliche Vertrautheit mit den oben genannten Begriffen und mathematischen Vorgehensweisen vorauszusetzen. Dafür gibt es manche Gründe, die teils vermeidbar und teils unabänderlich sind: manche der Ziele wurden nur halbherzig befolgt, indem sie nämlich lediglich auf den vorhandenen Stoffkanon aufgepfropft und nicht in diesen integriert wurden (das gilt teilweise für die Mengenlehre); für die Ziele 1), 2) und 6) genügt es auch nicht, ihre Forderungen nur cursorisch kurz im Unterricht zu Wort kommen zu lassen, die Vertrautheit mit den angesprochenen Begriffen und mathematischen Methoden kann nur durch steten Gebrauch erreicht werden; andere der Ziele müßten, damit dies erreicht wird, bereits früher als es bisher der Fall ist im Unterricht

1) Siehe Lehrpläne für die Höhere Schule in Bayern, Mathematik, veröffentlicht im Amtsblatt des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus

2) Die erste Fassung dieser Arbeit entstand von 1972 bis 1974

berücksichtigt werden (etwa der allgemeine Funktionsbegriff¹⁾); zuletzt muß auch die Rolle des Vergessens berücksichtigt werden.

Nimmt man also an, daß die als wünschenswert aufgezählten Vorkenntnisse nicht oder nur teilweise vorhanden sind, so gilt es zu überlegen, auf welche Weise sie doch noch erzielt werden können. Hierbei sollte unbedingt folgende allgemeine Regel beachtet werden: "..., daß eine Wiederholung nicht den Charakter einer verkürzten Neueinführung haben darf."²⁾ Diesem Prinzip folgend werden im vorliegenden Kurs die verschütteten Kenntnisse größtenteils mit Hilfe von konkreten Aufgaben, die der Schüler zu bearbeiten hat, gewonnen. Die Aufgaben sind so gewählt, daß ihre Ergebnisse außerdem unmittelbar für das Fortfahren im Kurs nützlich sind. Dies zu tun fordert auch die Zeitknappheit, in der ein solcher Kurs stets ist. Die Entscheidung für ein solches Vorgehen zur Gewinnung der nötigen Vorkenntnisse entspringt meiner Erfahrung, daß der Schüler zwar meist auch nach längerer Zeit früher gelernte Methoden und Begriffe auf konkrete Beispiele richtig anzuwenden weiß, aber nicht mehr in der Lage ist, die allgemeine Definition der verwendeten Begriffe und Methoden zu geben.

Während die Definitionen der Mengenbeziehungen und Mengenverknüpfungen nicht in das Schülerbuch aufgenommen wurden³⁾, geschah dies andererseits bewußt für die Begriffe

-
- 1) Steiner, H.-G.: "Zur Behandlung des Funktionsbegriffs" in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen, Göttingen 1967, S. 139-173, hier: S.148
 - 2) Mader, Pietzsch, Lorenz, Stoye, Frank: Mathematik 11. Klasse, Methodische Hinweise zum Lehrplan 1969, Berlin 1972, S. 35
 - 3) Es erscheint nicht ersprießlich bei jedem Lehrgang der Oberstufenmathematik ein großes Kapitel Mengenlehre vorzuschalten.

"Abbildung" und "Folge" doch. Bei diesen Begriffen begnügt man sich also nicht damit, die Kenntnisse darüber wieder aufzufrischen, sondern legt ihre Definition danach nochmals präzise nieder. Das hat seinen Grund darin, daß diese Begriffe im Laufe des Kurses verallgemeinert werden müssen.

Insgesamt wurde das Prinzip vertreten, möglichst wenige Vorkenntnisse als generell voraussetzbar zu postulieren und trotzdem so rasch wie nur möglich zu den eigentlichen Anliegen der Topologie zu kommen. Bedenkt man, daß die organisatorische Form eines Topologiekurses wohl stets so sein wird, daß Schüler aus verschiedenen Klassen, ja Klassenstufen zusammengefaßt sind, so erscheint obiges Grundprinzip die voraussetzbaren Vorkenntnisse betreffend als sehr realistisch.

1.4.2 Allgemeine methodische Leitlinien

Wo immer Unterricht geplant oder durchgeführt wird, stets werden eine ganze Reihe von Wertvorstellungen ihren Einfluß geltend machen. Diese sind teilweise durch den Zeitgeist und gesellschaftliche Gegebenheiten geprägt, haben andernteils aber auch ihren Ursprung in der Struktur der jeweiligen Persönlichkeit, die den Unterricht plant und gestaltet. Diese Wertvorstellungen prägen jedenfalls sowohl die inhaltlichen Zielsetzungen eines Unterrichts wie seine methodischen Leitlinien. Letztere seien für den folgenden Topologiekurs nun im Anschluß dargelegt. Die dabei eingehaltene Reihenfolge soll keine Gewichtung der aufgeführten Prinzipien darstellen.

Im Lehrerbuch (siehe § 3!) wird an zahlreichen Stellen die Bezeichnung "gelenktes Entdecken" für eine bestimmte methodische Vorgehensweise gebraucht. Das "Entdecken" durch den Schüler ist als Gegensatz zum Vorführen oder bloßen Vorstellen durch den Lehrer zu verstehen. Das Wort "Entdecken" hinterläßt den Eindruck von größerer Freiheit des Lernenden. Die Wortverbindung "gelenktes Entdecken" schränkt diesen Eindruck wieder ein. "Gelenktes Entdecken" soll somit vom "freien Entdecken" unterschieden werden.

Am Beispiel der "Entdeckung" der Axiome des topologischen Raumes soll dieser Unterschied kurz dargestellt werden. Nach einem Modell, das stärker dem "freien Entdecken" verschrieben ist, würde man den Schülern lediglich genügend Beispielmateriale bereits bekannter topologischer

Räume vorlegen¹⁾ und erwarten, daß die gemeinsamen Eigenschaften der Beispiele von den Schülern gefunden werden und sich zu den gesuchten Aussagen (den Axiomen) verdichten lassen. Für dieses methodische Vorgehen braucht man jedoch viel Unterrichtszeit, denn es ist damit zu rechnen, daß der Entdeckungsprozeß auch Wege nehmen wird, die sich dann als Sackgasse herausstellen. Im ungünstigsten Fall bestünde sogar die Möglichkeit, daß die gemeinsamen Eigenschaften, die entdeckt werden sollen, überhaupt nicht als auffallend bemerkt werden. Diese Gefahr besteht z.B. für das Beispielmateriel der drei bekannten Räume $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Diese sind dem Schüler aus der zurückliegenden Schulzeit sehr vertraut. Die frühere Beschäftigung mit diesen Räumen zielte allerdings auf andere Eigenschaften ab als die jetzt zu entdeckenden. Die geschilderten Nachteile des "freien Entdeckens" sollen beim "gelenkten Entdecken" vermieden werden. Durch die "Lenkung" verspricht man sich Zeitersparnis und eine gewisse Sicherheit hinsichtlich der Erreichung des Zielles. Die "Lenkung" erfolgt hier vor allem durch konkrete Aufgaben- und Fragestellungen zu dem konkret vorgegebenen Beispielmateriel. Allerdings soll die Lenkung behutsam erfolgen, sie soll die Freiheit des Entdeckens nicht zu sehr einengen, sie darf also nicht mit suggestivem Erfragen verwechselt werden. Gelenktes Entdecken ist eine besondere Form des induktiven Vorgehens, insofern gelten die Ausführungen von 1.1.

1) In einer Vorauswahl der Beispiele läge bereits eine gewisse Lenkung des Entdeckungsprozesses. Man bedenke jedoch, daß es sich bei der Unterscheidung "freies", "gelenktes Entdecken" um Typisierungen handelt; in Reinform werden beide Typen des Lernvorgangs nicht auftreten.

Der Weg zu neuen Begriffen ist nach obigen Ausführungen also als ein behutsames Reifenlassen charakterisierbar. Zudem soll beachtet werden, daß die Einführung eines neuen Begriffs methodisch-didaktisch so gestaltet wird, daß für den Schüler eine innere Notwendigkeit für diesen spürbar wird. Diese methodische Forderung hat auch Auswirkungen auf die Stoffauswahl. In 2. kann als Beispiel hierfür etwa die Einführung der Bezeichnung "hausdorffsch" genannt werden. Diese spezielle Eigenschaft topologischer Räume wird bewußt nicht in einem eigenen Kapitel als Gesichtspunkt zur Klassifizierung topologischer Räume behandelt, sondern wird dort aufgezeigt, wo diese Eigenschaft Ursache für besonderes Konvergenzverhalten ist. Weiterhin ist für die Neueinführung von Begriffen zu beachten, daß diese erst

durch den Kontrast plausibel werden. Als Beispiel für dieses Prinzip kann bereits die erste Seite des Schülerbuchs (siehe § 2!) dienen, wo neben offenen Intervallen auch die halboffenen und abgeschlossenen erwähnt werden.

Die Erfahrungen, die sich zur Definition eines neuen Begriffs verdichten sollen, werden nicht ausschließlich vom Lehrer zusammengefaßt, geschweige denn bereits in formalisierter Kurzform. Stattdessen soll der Schüler zunächst verbal seine Erfahrungen zusammenfassen oder verallgemeinern. Im gesamten Unterricht sollte das Sprechen über mathematische Sachverhalte nicht vernachlässigt werden. Dabei soll soweit keine Gefahr für inhaltlich falsche Begriffsbildungen besteht auch der formal nicht perfekten Schülerantwort Berechtigung eingeräumt werden. Damit wird erreicht, daß auch Schüler, die zwar offensichtlich "richtig gedacht" haben, ihre Gedanken aber formal nicht hieb- und stichfest in einer entsprechenden Aussage wiederzugeben vermögen, nicht entmutigt werden, sondern Freude haben, sich am Unterrichtsgespräch zu beteiligen. Um bei möglichst vielen Schülern Verständnis für Mathematik im eigentlichen Sinn zu wecken, ist es nötig, zum Nachdenken anzuregen. Dazu ist das Gespräch das geeignete Mittel. Im Hinblick darauf wird man bestrebt sein, daß sich ein Großteil der Schüler wirklich engagiert daran beteiligen kann und will.

Beim Studium des Schülerbuchs (siehe § 2!) fällt auf, daß beinahe jede Definition zunächst ausführlich und dann unter Verwendung der üblichen Kurzzeichen aus der Logik und Mengenlehre in formalisierter Kurzform angegeben ist. In einigen Fällen ist die Erstellung der Kurzform auch dem Schüler überlassen. Die formale Kurzsprache der Mathematik hat für die Schulmathematik zwei Gesichter, je nachdem sie eingesetzt wird. Sie kann von Segen sein, wenn sie so eingesetzt wird, daß sie

tatsächlich als "Kurzschrift" mathematischer Aussagen vom Schüler empfunden wird und dieser in der Lage ist, die "verschlüsselten" Aussagen auch in ausführlicher Form wiederzugeben. Sie kann aber auch nachteilige Folgen haben, wenn diese Formelschrift zu früh und ohne ausreichende Vertrautheit mit den ausgedrückten Inhalten eingesetzt wird. Dann entsteht beim Schüler der Eindruck als stelle eigentlich dieser Formelapparat die Mathematik dar. Fehlt das eigentliche Verständnis, so bekommt diese Kurzsprache für den Schüler den Anstrich einer Geheimsprache, die nur Eingeweihte beherrschen. Das kann schlimmstenfalls nach sich ziehen, daß er gar nicht erst versucht, diese knifflige Geheimsprache auch zu beherrschen - er resigniert also. Fast im gleichen Maß ungünstige Wirkung wie das Resignieren hat das unreflektierte Übernehmen der Formalsprache; es geht oft auch eine unkritische Haltung neuen Begriffen gegenüber damit einher. Aus den geschilderten Gründen ist im vorliegenden Schülerbuch (siehe § 2!) ein Wechsel zwischen ausführlicher Sprechweise und formalisierter Kurzform angestrebt. Meine Erfahrungen im Kurs I bestärken mich in meinen oben geschilderten Befürchtungen. Die Schüler des Kurses I waren fast durchweg sehr gewandt im Gebrauch der formalisierten Kurzform, insbesondere im Gebrauch der Quantorzeichen und der dafür geltenden Negationsregeln. Der Grund für diese Gewandtheit lag darin, daß ein Großteil der Kursteilnehmer den Kurs Boolesche Algebra bereits im Vorjahr besucht hatten oder diesen parallel zum Kurs Topologie besuchten. Sollten diese Schüler jedoch eine formalisierte Aussage in ausführlicher Form wiedergeben, so hatte ein Großteil Schwierigkeiten, erst recht, wenn die Negation einer Aussage, die Quantoren aufwies, verlangt wurde.

Eine wenn auch trivial erscheinende methodische Devise des Lehrgangs ist: nach jeder Definition soll ein Beispiel folgen. Bei der Wahl dieser Beispiele, die den soeben definierten Begriff in leicht fasslicher Form demonstrieren sollen, ist auch das Prinzip der Variation der Veranschaulichung¹⁾ zu beachten. Während in Studienbüchern der Mathematik auf die Definitionen folgend meist nur die trivialen Grenzfälle als Beispiele genannt werden, würde der Schüler gerade aus diesen zur Festigung des soeben eingeführten Begriffes am wenigsten Gewinn ziehen.²⁾ Auch für neueingeführte mathematische Methoden ist es generell nötig, ihren Einsatz zunächst an einem Beispiel vorzuführen, bevor der Schüler ohne Hilfe an ein entsprechendes Problem herangeht. Neben diesen dem Schüler als Stütze gegebenen Beispielen sind auch solche von Bedeutung, die er selbst finden soll. Dem Bestreben gemäß, die Kreativität des Schülers weitgehend zu fördern, ist an einigen Stellen des Lehrgangs der Schüler selbst aufgefordert, demonstrative Beispiele für bestimmte Aussagen anzugeben.

Auch ein Lehrgang, der insgesamt unter dem Vorzeichen induktiven Vorgehens steht, kommt nicht ohne deduktive Passagen (sprich: Beweise) aus. Hier besteht die Gefahr, daß der Kurs zeitweilig in eine bloße Folge von Satz, Beweis, Satz, Beweis ausartet. Dieser Rhythmus kann unterbrochen werden, indem man Aufgaben auf die Sätze folgen läßt, die die jeweilige Aussage gerade anwenden. U.a. damit das deduktive Prinzip nicht das Übergewicht bekommt, werden die Aussagen der Sätze meist vor ihrer eigentlichen Formulierung induktiv

-
- 1) Gebrauch dieser Bezeichnung siehe Dienes, Z.P.: Methodik der modernen Mathematik, Grundlagen für das Lernen in Zyklen (Orig.-Titel: Approach to modern mathematics. Übersetzt von P. Herford u.a.), Freiburg 1970
 - 2) Auf die Darstellung der trivialen Grenzfälle wird freilich nicht völlig verzichtet, dies wäre schon der Vollständigkeit halber nicht zu vertreten.

gewonnen. Sind die Beweise zu den jeweiligen Sätzen komplizierterer Natur, so bedarf es zu ihrer Er- und Verarbeitung eines beträchtlichen Zeitaufwandes. Abgesehen davon, daß sich dies auf die zur Verfügung stehende Gesamtzeit für die Behandlung der Begriffe auswirkt, lenken die längeren Beweise von dem Gedankenablauf im Großen ab, d.h. dem Sinn der Aufeinanderfolge der Begriffe und Erkenntnisse. An manchen Stellen des Lehrgangs wird aus Zeitersparnisgründen deshalb statt des vollständigen Beweises nur eine Beweisskizze aufgenommen oder die Beweise mehrerer Einzelaussagen auf Arbeitsgruppen innerhalb der Kursteilnehmer aufgeteilt, so daß sich nicht jeder Schüler mit jedem Beweis gründlich befassen muß.

Die vorgenannten Mittel sollten jedoch nur überlegt und sparsam eingesetzt werden. Werden die Beweise ständig oder überwiegend unterdrückt, so müssen die entsprechenden Aussagen zum Ersatz mit Hilfe der Anschauung belegt werden oder auf Grund unbelegter Analogieschlüsse gewonnen werden. Das Lösen von der Anschauung war jedoch gerade eines der Ziele eines Topologiekurses, was dadurch mißachtet würde. Auch kann es gerade in der Oberstufe nicht angehen, den Schüler zu unkritischer Haltung zu erziehen. Der fächerübergreifende Wert mathematischen Denkens ist gerade, Vermutung und bewiesene Aussage genau auseinander zu halten.

Beweise sind auch wiederum nicht nur als zeitraubende Hindernisse im Kursablauf zu sehen. Das Beweisen entwickelt und stärkt sowohl spezielle mathematische Fähigkeiten als auch allgemeine Fähigkeiten des logischen Denkens. Aus diesem Grunde sollten einige Beweise sehr wohl ausführlich erarbeitet werden. Die Erfahrung zeigt, daß ein Großteil der Schüler nicht ohne die Hilfe des Lehrers größere Beweise erstellen kann. Selbst das nachvollziehende Verstehen bereitet vielen

Schülern Schwierigkeiten. Die eingehendere Beschäftigung mit Beweisen ist jedoch nur dann wirklich vertretbar, wenn der größere Teil der Schüler an ihr aktiv mitwirken kann - wobei sich die Aktivität auch auf ein einsichtiges Nachvollziehen beschränken kann. Diese Aktivität wird nur erreicht werden, wenn die Schüler mit Verständnis zu folgen vermögen. Aus diesem Grunde muß danach gestrebt werden, die Beweisgänge so durchsichtig und die Beweisschritte so einsichtig wie möglich werden zu lassen. Man versucht demnach Schwierigkeiten zu isolieren. Ein Mittel dazu ist u.a. das Auflösen soweit möglich in eine Stufenleiter von Teilaussagen¹⁾, die auf die angestrebte Aussage hinführt. Dies ist z.B. dann sinnvoll, wenn die Teilaussagen leichter zu beweisen sind als die Aussage selbst.

Für die Beweise von Teilschritten werden außerdem soweit möglich schematische Darstellungen der Zusammenhänge als Denkhilfen gegeben. Die in diesem Vorgehen begründete Problematik wird in 3.4.2 genauer besprochen. Neben dieser Erleichterung für das Verständnis der Teilschritte kann ein Ablaufdiagramm eventuell helfen den Überblick über den gesamten Beweisgang klar vor Augen zu haben. Die Benützung der technischen Einzelheiten von Ablaufdiagrammen ist jedoch nur dann angeraten, wenn die Schüler damit vertraut sind. An ihrer Stelle kann man sich jedoch auch mit einer groben Aufstellung der aufeinanderfolgenden Gedankengänge begnügen. Alle diese Mittel, die dazu dienen, dem Schüler Sicherheit im Umgang mit Beweisen zu bieten, schlagen jedoch fehl, wenn der Schüler nicht wirklich an der zu beweisenden Aussage interessiert ist. Meine Erfahrung ist die, daß Schüler von

1) Die Bezeichnung "Teilaussage" ist nicht wörtlich zu nehmen. Sie steht oft auch für das, was in mathematischen Skripten Hilfssatz heißt.

allgemeinen Aussagen meist nicht sofort motiviert sind. Es ist deshalb nötig, zu der jeweiligen Problemstellung konkrete Beispiele vorzulegen. Der induktive Weg zu einer allgemeinen Aussage wird in 2. z.B. an der Aussage: "Die Vereinigung von unendlich vielen offenen Mengen der Ebene ist offen." sichtbar. Während der Schüler von dieser allgemeinen Aussage nicht angesprochen ist, motiviert ihn die Beschäftigung mit einer speziellen genau vorgegebenen Menge von offenen Mengen.

Ein weiterer methodischer Gedanke, der gerade für die Oberstufenmathematik Bedeutung hat, ist der der Anleitung zur Selbsttätigkeit. Einige der Themen des Lehrgangs können aus Zeitgründen nur angeschnitten werden, jedoch nicht vollständig abgehandelt. Beachtet man vorstehendes Prinzip, so kann aus der Not eine Tugend werden, indem gerade diese nur angeschnittenen Themen zum selbständigen Weiterbearbeiten anregen. In dieser Richtung verstehe ich auch das Anliegen der in der Kollegstufe üblichen Facharbeiten, also den ausführlicheren Abhandlungen, die der Schüler selbständig zuhause anfertigen soll.

1.4.3 Der Faktor "Lehrperson"

Im Normalfall wird ein Kurs wie der vorliegende Topologie-Kurs von einem Lehrer durchgeführt werden. Deshalb muß in die grundsätzlichen methodischen Überlegungen auch der Faktor "Lehrperson" mit eingeschlossen werden. Auf S.38 und S.46 wurde dieser Faktor bereits kurz angesprochen. Zusätzlich sollen nur zwei wichtige Anmerkungen gemacht werden, die unerläßliche Voraussetzungen des Kurses betreffen.

Daß der Lehrer in dem Thema, das er behandeln will, gründlich beschlagen sei, wird generell für jeden Unterricht und so auch für einen Topologie-Kurs gefordert. Für diesen verbirgt sich jedoch für den Lehrer eine besonders schwierige Aufgabe dahinter. Das hat einmal eine fachwissenschaftliche Erklärung, denn die Topologie hat sich seit ihrer Entstehung besonders temperamentvoll entwickelt, so daß der Wissensstoff beachtlich angewachsen ist. Zum anderen liegt es an den in 1.3 geschilderten allgemeinen Zielen, die sich der Kurs gesteckt hat. Bedenkt man die Altersstufe der Schüler, so muß man vom Vorwissen her und von den im Kurs angeschnittenen Themen her damit rechnen, daß die Schüler stark zu Fragen angeregt werden. Dies deckt sich mit meinen Erfahrungen in den Versuchsklassen. Dabei halten sich die Fragen nicht mehr nur an die engere Teildisziplin Topologie sondern streifen auch viele andere Disziplinen der Mathematik. Erschwerend kommt hinzu, daß sich der Lehrer auf die zahlreichen Zusatzfragen der Schüler kaum punktuell vorbereiten kann, da sie vielfach aus der Situation kommen und unerwartet sind.

Eine weitere nicht leicht zu meisternde Aufgabe ergibt sich für den Lehrer aus den in 1.4 beschriebenen methodischen Leitgedanken des Kurses. Die hier geforderte pädagogische Verhaltensweise läßt sich nicht in kurzer Zeit erlernen. Es bedarf einer längeren Zeit des Sich-Hineinlebens in Lehrerverhalten, wie ich es mir z.B. für die Passagen des gelenkten Entdeckens und der Dialoge Schüler-Schüler-Lehrer vorstelle. Den richtigen Unterrichtsstil halte ich jedoch für beinahe ebenso wichtig wie die fachliche Korrektheit des Schülerbuches.

1.4.4 Bemerkungen zur formalen Gestaltung des Schülerbuches

Das Schülerbuch des Lehrgangs (siehe § 2!) ist so ausführlich gehalten, daß es auch zum Selbststudium geeignet ist. Die Art der Darstellung könnte man mit "halb-programmiert"¹⁾ bezeichnen. Dies zeigt sich in der Verwendung von vorbereitenden Fragen und Aufgaben, die der Einführung neuer Begriffe vorgeschaltet sind und auch zur Auffindung von Aussagen dienen, die als Sätze in den Lehrgang übernommen werden. Bei der Abfassung der Fragen und vorbereitenden Aufgaben ist darauf geachtet, daß die Beantwortung fast durchweg allen Schülern möglich ist.²⁾ Deshalb sind auch die Antworten, die ja bei einem Unterrichtsprogramm des programmierten Unterrichts auf jede Frage unmittelbar folgen, weggelassen worden. Leitet ein Lehrer den Kurs (dies wird als Regelfall angenommen), so entsteht daraus kein Problem. Für den Fall des tatsächlichen reinen Selbststudiums würde dem Schülerbuch ohnehin ein Anhang mit allen Antworten beigelegt.³⁾ Grundsätzlich scheint es mir angebracht, dem Schüler jeweils ein Lösungsheft zum Buch mit in die Hand zu geben.

Bei der Gliederung des Schülerbuches ist von der fachlichen Systematik zugunsten methodischer Gesichtspunkte abgesehen worden. So erschien es z.B. wichtiger, daß ein Begriff in natürlicher Weise durch den vorangehenden vor-

1) Die Bezeichnung "halb-programmiert" bezieht sich auf die Bezeichnung programmierter Unterricht.

2) Siehe hierzu Kap. 1.4.1: Das Problem der Vorkenntnisse

3) Siehe Hinweis in Fußnote 1) der Seite 57

bereitet wird. Auf diese Weise sollten "gewaltsame" Übergänge vermieden werden.

Die formale Gestaltung des gesamten Schülerbuches steht unter dem Zeichen der möglichst großen Klarheit und Übersichtlichkeit als selbstverständlicher Forderung. Ein Beitrag dazu ist z.B. die Symbolverwendung. Aus diesem Grunde werden durchgehend für Punkte eines Raumes kleine lateinische Buchstaben verwendet, für Teilmengen des Raumes und für die Menge der Punkte des gesamten Raumes werden große Buchstaben verwendet und für Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind, deutsche Großbuchstaben. Werden etwa bei der Angabe des Radius einer Kreisscheibe reelle Zahlen nicht als Punkte des Raumes ($\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$) verstanden, sondern als Maßzahlen, so werden sie mit kleinen griechischen Buchstaben abgekürzt. Auf die Bedeutung der Schreibweise $f[A]$ für das Bild einer Menge A bei der Abbildung f im Gegensatz zur Schreibweise $f(x)$ für das Bild eines Punktes x bei der Abbildung f wird in 3.4 hingewiesen.

Bei den Beweisen, für die es nötig ist, zwei Beweisrichtungen zu unterscheiden, wollte ich dies zunächst durch den Gebrauch der Symbole " $\Rightarrow$ " und " $\Leftarrow$ " als Überschriften tun. Dieser Gebrauch war den Schülern jedoch neu, so daß ich im Schülerbuch stattdessen die Überschriften "1. Beweisrichtung" und "2. Beweisrichtung" einführte.

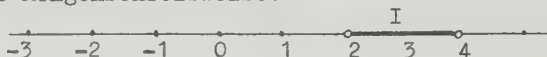
2 Das Schülerbuch zum Lehrgang

=====

2.1 Axiomatische Grundlegung

2.1.1 Vorbereitende Fragen und Aufgaben¹⁾

- 1) Geben Sie das unten gezeichnete Intervall I ²⁾ als Punktmenge wieder! Erinnern Sie sich an die früher benutzte Mengenschreibweise!



$I = \{x \mid x \text{ hat die Eigenschaft } \dots\}$

kürzer: $I = \{x \mid \dots\}$

- 2) Wie unterscheidet sich die mengentheoretische Schreibweise je nachdem ob man das offene Intervall I oder das abgeschlossene Intervall $\bar{I}$ beschreiben will?
- 3) Ist der Durchschnitt der Punktmenge I mit einem beliebigen anderen Intervall wieder ein Intervall in $\mathbb{R}$?
- 4) Ist die Vereinigung der Punktmenge I mit einem beliebigen anderen Intervall wieder ein Intervall in $\mathbb{R}$?
- 5) Wie lassen sich offene Kreisscheiben³⁾ der Ebene in Mengenschreibweise wiedergeben?

$K(z, \varrho) = \{x \mid \dots\}$

-
- 1) Die Fragen sind so gestellt, daß Sie sie mit Ihren bisherigen Schulkenntnissen beantworten können sollten. Trifft dies einmal nicht zu, so können Sie die einzelne Antwort im Lösungsheft nachsehen. Sie sollten danach aber wieder versuchen, ohne Hilfe weiterzuarbeiten.
- 2) Im folgenden sollen Punkt Mengen stets mit großen lateinischen Buchstaben (A, B, ... M, N, O, ...) bezeichnet werden und ihre Elemente, die Punkte, mit kleinen lateinischen Buchstaben (a, b, ... p, r, ... x, y, z).
- 3) Für offene Kreisscheiben mit Zentrum z und Radius $\varrho > 0$ soll im folgenden stets die Abkürzung $K(z, \varrho)$ verwendet werden.

- 6) Worin besteht der Unterschied zur Beschreibung einer abgeschlossenen Kreisscheibe?¹⁾
- 7) Können Sie sich neben offenen Kreisscheiben auch andere offene Punktmengen der Ebene vorstellen? Beschreiben Sie solche!

Vermutlich haben Sie analog zum Begriff "offene Kreisscheibe" nun an offene Quadrate, offene Rechtecke, offene Dreiecke gedacht.

- 8) Versuchen Sie ein selbst gewähltes "offenes Rechteck" zeichnerisch darzustellen, indem Sie alle zur Punktmenge gehörenden Punkte in grüner Farbe darstellen! Wird es Ihnen beim Zeichnen gelingen, das gezeichnete "offene Rechteck" vom gleichgestaltigen "abgeschlossenen Rechteck" unterscheidbar zu machen?

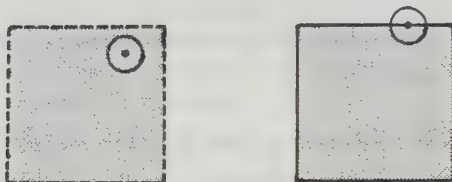
Man kann offene Mengen nur symbolisch darstellen. Man markiert dazu z.B. die Randpunkte, die nicht zur offenen Menge gehören sollen, mit roter Farbe. Einige Beispiele offener Mengen in der Ebene:



- 9) Versuchen Sie, die offenen Kreisscheiben, Quadrate, Dreiecke usw. der Ebene im Gegensatz zu den abgeschlossenen anschaulich zu beschreiben ohne die Worte Rand bzw. Randpunkt zu verwenden!
- Anleitung: Finden Sie eine Eigenschaft, die allen

1) Kurzbezeichnung $\bar{K}(z, \varrho)$

Punkten einer offenen Menge gemeinsam ist, die die Randpunkte einer abgeschlossenen Menge jedoch nicht haben. Als Hilfe dienen folgende Zeichnungen



Die gefundene gemeinsame Eigenschaft aller Punkte eines offenen Quadrates wollen wir zur Definition von beliebigen offenen Mengen in der Ebene verwenden.

Definition 1:

Eine Punktmenge M aus $\mathcal{P}^1$ heißt offen, wenn es zu jedem Punkt p aus M ein $\delta > 0$ gibt, so daß $K(p, \delta)$ ganz in M liegt.

Aufgabe 1:

Gegeben seien folgende Punktfolgen A, B, C, D, E in $\mathcal{P}$ (symbolhafte Darstellung!)

Gibt es zu den eingezeichneten Punkten²⁾ 1 bis 7 offene Kreisscheiben, die ganz in A bzw. B usw. liegen?



- 1) $\mathcal{P}$ ist die Abkürzung für die Menge aller Punkte der zweidimensionalen euklidischen Ebene
- 2) Die Punkte seien jeweils Elemente von A bzw. B bzw. C bzw. D

Aufgabe 2:

Beantworten Sie für die Punktmengen A, B, C, D, E die Frage "offen oder nicht offen"?¹⁾

Aufgabe 3:

- a) Ist die Vereinigung zweier offener Kreisscheiben nach Definition 1 eine offene Menge in $\mathbb{J}$?
- b) Ist der Durchschnitt zweier offener Kreisscheiben nach Definition 1 eine offene Menge in $\mathbb{J}$?

Liefern Sie für a) oder b) einen exakten Beweis! - Definition 1 wird hierfür nachfolgend nochmals unter Verwendung der üblichen logischen Zeichen in Kurzform angegeben.

Definition 1 in Kurzform:

$$M \subseteq \mathbb{J} \text{ , } M \text{ offen} \Leftrightarrow \bigwedge_{p \in M} \bigvee_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ \xi > 0}} K(p, \xi) \subseteq M$$

Bemerkung:

Die Aussage "zu jedem Element p der leeren Menge gibt es ein $K(p, \xi)$, das ganz in der leeren Menge liegt" ist wahr, da es in der leeren Menge kein Element gibt. Somit erfüllt $\emptyset$ die Definition 1. $\emptyset$ ist offen.

Aufgabe 4:

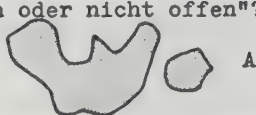
Sind folgende Mengen aus $\mathbb{J}$ nach Definition 1 offen?

- a) G (eine beliebige Gerade in $\mathbb{J}$)
- b) die Menge aller Punkte, die zwischen zwei verschiedenen parallelen Geraden liegen jedoch nicht auf ihnen
- c) $\{p\}$ (eine beliebige einpunktige Menge aus $\mathbb{J}$)
- d) ein offenes Intervall auf einer beliebigen Geraden G
- e) $\mathbb{J}$

1) In der Topologie ist die Alternative zur Eigenschaft "offen" nicht die Eigenschaft "abgeschlossen". Vgl. später!

Aufgabe 5:

Beantworten Sie unter Benützung der Definition 1 für folgende symbolhaft gegebene Punktmengen aus $\mathcal{U}$ die Frage "offen oder nicht offen"?



A



C



B



D

Im Vorangegangenen haben wir durch Definition 1 festgelegt, was wir unter offenen Mengen in der Ebene verstehen wollen. Die Definition erscheint uns plausibel, denn die Punktmengen, die wir schon vorher offene Kreisscheiben, offene Quadrate usw. nannten, sind auch nach Definition 1 offene Mengen.

Fragen:

- 1) Beschreiben Sie, was Sie sich unter einer offenen Vollkugel vorstellen! (Hilfe: Analogie zur offenen Kreisscheibe!)
- 2) Geben Sie in Mengenschreibweise die offene Vollkugel mit Radius ϱ und Zentrum z an!

$$V(z, \varrho)^{1)} = \{x \mid \dots\dots\dots\}$$

1) Die Bezeichnung $V(z, \varrho)$ soll an Vollkugel (deshalb V) erinnern, die eindeutig durch die Angabe ihres Mittelpunktes und ihres Radius bestimmt ist. Ist die abgeschlossene Vollkugel zu kennzeichnen, also die Menge der Punkte der Kugel einschließlich der Punkte der Kugeloberfläche, so schreibt man

$$\bar{V}(z, \varrho)$$

- 3) Die offene Vollkugel ist Teilmenge des dreidimensionalen Raumes $\mathcal{G}$. Können Sie sich in diesem auch andere offene Mengen vorstellen als kugelförmige?
- 4) Kann man diese offenen Mengen ohne Benutzung der Begriffe Rand oder Randpunkt beschreiben? Geben Sie eine Eigenschaft an, die alle Punkte z.B. des offenen Würfels aufweisen! (Hilfe: Beim abgeschlossenen Würfel - gemeint ist die Punktmenge eines Würfels einschließlich der Punkte seiner Oberfläche - weisen die Oberflächenpunkte diese Eigenschaft nicht auf!)

Wir können also auch im dreidimensionalen Raum offene Mengen definieren, indem wir die zur Frage 4) gefundene Eigenschaft der Punkte eines offenen Würfels allgemein für Punkte offener Mengen fordern.

Definition 2

Eine Punktmenge T des dreidimensionalen Raumes $\mathcal{G}$ heißt offen, wenn es zu jedem Punkt z aus T ein $\varrho > 0$ gibt, so daß die offene Vollkugel $V(z, \varrho)$ ganz in T liegt.

Aufgabe 6:

Machen Sie sich analog zu Aufgabe 3 klar, daß die Vereinigung zweier offener Vollkugeln nach Definition 2 eine offene Menge des dreidimensionalen Raumes ist und ebenso der Durchschnitt zweier offener Vollkugeln!

Aufgabe 7:

Sind folgende Punktmengen im dreidimensionalen Raum offene Mengen?

- a) $\emptyset$
- b) eine offene Vollkugel $V(z, \varrho)$
- c) eine offene Kreisscheibe der (x_1, x_2) -Ebene des dreidimensionalen Raumes
- d) eine Gerade G
- e) die Vereinigung von drei offenen Vollkugeln
- f) die Menge G' aller Punkte des dreidimensionalen Raumes.

Aus den Antworten zur Aufgabe 7 geht hervor, daß Mengen, die in der Ebene offen sind, im dreidimensionalen Raum nicht offen sein müssen. Deshalb müssen wir jeweils sagen "Die Menge M ist offen in der Ebene $\mathbb{J}$ " oder "Die Menge M ist offen im dreidimensionalen Raum".

Wir vermuten, daß man auch in einem vierdimensionalen Raum oder einem fünfdimensionalen Raum auf ähnliche Weise wie in Definition 1 oder in Definition 2 offene Mengen definieren kann.

Im folgenden wollen wir die zweidimensionale Ebene als zweidimensionalen Raum ansehen, eine Gerade (Zahlengerade $\mathbb{R}$) ist dann ein eindimensionaler Raum.

Im eindimensionalen Raum sind die offenen Intervalle mit z als Mittelpunkt und der Länge 2ϱ das Pendant zu den offenen Kreisscheiben vom Radius ϱ des zweidimensionalen Raumes und das Pendant zu den offenen Vollkugeln vom Radius ϱ des dreidimensionalen Raumes.



Das offene Intervall $I(z, \varepsilon)$ wird in Mengenschreibweise dann so wiedergegeben

$$I(z, \varepsilon) = \{x \mid d(x, z) < \varepsilon\}^1_{\mathbb{R}}$$

Weil die Mengenschreibweisen der offenen Kreisscheiben im zweidimensionalen Raum, der offenen Vollkugeln im dreidimensionalen Raum und der Intervalle im eindimensionalen Raum somit jeweils gleich aussehen²⁾, gibt der Mathematiker allen diesen Punktmengen den Namen "Kugel".

$I(z, \varepsilon)$ ist dann also eine eindimensionale Kugel. Wenn wir in einem vierdimensionalen Raum eine Abstandsfunktion $d(x, y)$ erklären können, dann haben wir dort vierdimensionale Kugeln.

In den Definitionen 1 und 2 spielen die zweidimensionalen Kugeln (die Kreisscheiben) bzw. die dreidimensionalen Kugeln (die Vollkugeln) eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe kann man festlegen, wann eine Menge die Eigenschaft "offen" im zweidimensionalen bzw. dreidimensionalen Raum hat.

Dieses Verfahren wollen wir auf Räume anderer Dimension übertragen. Im eindimensionalen Raum lautet die Definition offener Mengen dann:

Definition 3

Eine Punktmenge P des eindimensionalen Raumes heißt offen, wenn es zu jedem Punkt z aus P ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß das offene Intervall $I(z, \varepsilon)$ ganz in P liegt.

- 1) $d(x, z)$ ist die Entfernung des Punktes x vom Punkt z und ist in $\mathbb{R}$ natürlich $d(x, z) = |x - z|$.
- 2) Die Punktmengen selbst unterscheiden sich natürlich, da die Grundmengen verschieden sind.

Aufgabe 8:

Sind folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach Definition 3 offen in $\mathbb{R}$? a) $(2;5)$ b) $\emptyset$

c) $\{p\}$

d) $\{2; 1; -1; -2\}$

e) $[2;7)$

f) $(-\infty; 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

g) $(1;5) \cup (6;7)$

h) $(0;1) \cup (1;3) \cup (3;6)$

i) $(3; \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x\}$ k) $\mathbb{R}$

Aufgabe 9:

Geben Sie Definition 3 in formalisierter Kurzform wieder!

Aufgabe 10:

Zeigen Sie, daß die Vereinigung zweier offener Mengen aus $\mathbb{R}$ wieder eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist.

(Hinweis: Auf die Punkte der Vereinigungsmenge $A \cup B$ wird die Definition 3 angewendet, wobei vorausgesetzt wird, daß alle Punkte von A die Forderung von Definition 3 erfüllen und für sich betrachtet alle Punkte von B ebenfalls. Für die Punkte aus $A \cup B$ gilt, daß sie aus A oder B sind. Gilt dann für sie, daß es zu jedem von ihnen ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $I(x, \varepsilon)$ ganz in $A \cup B$ liegt?)

Aufgabe 11:

Zeigen Sie, daß der Durchschnitt zweier offener Mengen aus $\mathbb{R}$ wieder eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist.

Nach der Bearbeitung der Aufgaben 8, 9, 10 ist es uns ohne weiteres möglich, 5 oder mehr in $\mathbb{R}$ offene Mengen aufzuschreiben. Tun Sie dies!

Wollten wir nun a l l e in $\mathbb{R}$ offenen Mengen auf die selbe Weise nach und nach aufschreiben, so wird uns rasch klar, daß dies erfordern würde, unendlich viele Teilmengen von $\mathbb{R}$ aufzuschreiben. Dies ist nicht möglich. Trotzdem verfügen wir in "beschreibender Form" über die Menge

all e r offenen Mengen in $\mathbb{R}$, da wir ja die Definition 3 haben. Die Menge aller laut Definition 3 offenen Mengen von $\mathbb{R}$ wollen wir mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ abkürzen¹⁾. Ist $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ²⁾ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$, so gehören zu $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ genau die $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, die die Definition 3 erfüllen.

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \{ X \mid X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \wedge X \text{ erfüllt Definition 3} \}$$

Analog wird die Menge der in $\mathbb{I}$ nach Definition 1 offenen Mengen $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ und die Menge der in $\mathbb{G}$ laut Definition 2 offenen Mengen $\mathcal{T}_{\mathbb{G}}$ beschrieben.

Aufgabe 12:

Wir gewöhnen uns an den Gebrauch der Abkürzungen $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{G}}$.

a) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$$\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathbb{I}} ; (1; \infty) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} ; K(z, s) \in \mathcal{T}_{\mathbb{G}} ; [0; 2] \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \\ \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} ; \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{G}} ; (1; 4) \cup (6; 8) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

b) Geben Sie die in Aufgaben 10 und 11 enthaltenen Behauptungen nochmals in anderer Form wieder, indem Sie die Abkürzung für die Menge aller in $\mathbb{R}$ offenen Mengen benutzen.

Es stört uns nun, daß die Definitionen 1, 2 und 3 der offenen Mengen in $\mathbb{I}$ bzw. $\mathbb{G}$ bzw. $\mathbb{R}$ nicht ohne die Abstandsfunction $d(x, y)$ auskommen. Die in den angesprochenen Definitionen zu jedem Punkt zu suchenden Kreisscheiben, Vollkugeln bzw. Intervalle werden ja mit Hilfe der Funktion $d(x, y)$ definiert. Wir wollen versuchen, die offenen

1) Die Wahl der Abkürzung wird erst später einsichtig.

2) Erinnern Sie sich daran, daß die Menge all e r Teilmengen einer Menge M , die Bezeichnung "Potenzmenge von M " trägt. Abkürzung: $\mathcal{P}(M)$

Mengen ohne Gebrauch einer Abstandsfunktion zu definieren. Zu diesem Zweck betrachten wir nicht einzelne offene Mengen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{J}$ oder $\mathcal{O}$, sondern die Mengen $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$. Wir fragen nach gemeinsamen Eigenschaften der Mengen $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$.

Eine gemeinsame Eigenschaft der Mengen $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$ fällt ins Auge, wenn wir zurückblättern. Wir haben nämlich in den zurückliegenden Aufgaben gezeigt,

daß	$\emptyset \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$	und	$\mathbb{J} \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$
und daß	$\emptyset \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}}$	und	$\mathcal{O} \in \mathcal{F}_{\mathcal{O}}$
und daß	$\emptyset \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$	und	$\mathbb{R} \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$

Indem wir für $\mathbb{J}$, $\mathcal{O}$ bzw. $\mathbb{R}$ eine Variable M einführen und die zugehörige Menge aller offenen Mengen mit $\mathcal{F}$ bezeichnen, erhalten wir anstelle der obigen 6 Aussagen:

$\emptyset \in \mathcal{F}$	und	$M \in \mathcal{F}$
-----------------------------	-----	---------------------

In Aufgabe 10 haben wir für $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ bewiesen:

wenn $R \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ und $S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, dann ist auch $R \cup S \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$

In Aufgabe 11 war für $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ zu beweisen:

wenn $R \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ und $T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, dann ist auch $R \cap T \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$

Analog läßt sich für $\mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ beweisen:

wenn $T_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und $T_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$, dann $T_1 \cup T_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und:

wenn $T_1 \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und $T_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$, dann $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{J}}$.

Analoges gilt für $\mathcal{F}_{\mathcal{O}}$.

Die Beweise für obige Aussagen sind in Aufgabe 3 und Aufgabe 6 für spezielle offene Mengen bereits durchgeführt worden.

Somit lassen sich zwei weitere gemeinsame Eigenschaften für M und die zugehörige Menge $\mathcal{F}$ aller in M offenen Mengen konstatieren:

Die Vereinigung zweier in M offener Mengen ist offen in M .

Der Durchschnitt zweier in M offener Mengen ist offen in M .

Unter Ausnützung der gefundenen Eigenschaften können wir ohne Mühe weiterschließen, daß auch die Vereinigung dreier offener Mengen wieder offen ist. Denn die Vereinigung von T_1 und T_2 ist offen und so ist die offene Menge $T_1 \cup T_2$ mit einer offenen Menge T_3 zu vereinigen. Die Vereinigungsmenge ist wieder offen, da die Vereinigung zweier offener Mengen offen ist. Auch bei Vereinigung von vier offenen Mengen erhalten wir wieder eine offene Menge.

Wir sind versucht, diese Gedankengänge weiterzugehen und zu sagen: "Die Vereinigung von unendlich vielen offenen Mengen ist wieder offen".

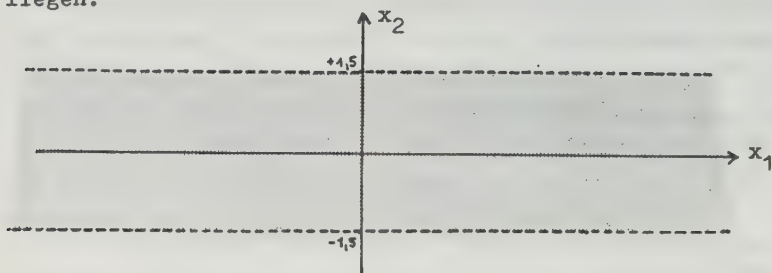
Ist dies in unseren Beispielen $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{F}_{\mathbb{J}}$ und $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ wirklich der Fall?

Es erscheint naheliegend, daß auch der Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen wieder offen ist.

Ob wir mit diesen Aussagen zu vorschnell urteilten, soll sich bei der Untersuchung von Beispielen aus $\mathbb{J}$ im folgenden Abschnitt zeigen.

2.1.2 Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen

$\mathcal{M}$ sei die Menge aller offenen Kreisscheiben mit Radius $\varrho = 1,5$ cm, deren Mittelpunkte auf der x_1 -Achse liegen.



Zu $\mathcal{M}$ gehören unendlich viele Kreisscheiben, die Zeichnung gibt nur einige davon wieder.

Wir bilden die Vereinigungsmenge aller zu $\mathcal{M}$ gehörenden Punktmengen (Kreisscheiben). Wir erhalten den Parallelstreifen, der zwischen den Geraden $x_2 = -1,5$ und $x_2 = 1,5$ liegt, aber die Punkte dieser Geraden nicht enthält. Nach links und rechts ist der Streifen unbegrenzt. (Geben Sie eine Begründung, die ohne Zuhilfenahme der Anschauung auskommt!)

In Aufgabe 4c haben wir gezeigt, daß dies (nach Definition 1) eine offene Menge ist.

Ein Beispiel, bei dem unsere Vermutung zutrifft, ist noch kein Beweis. Im folgenden sei eine Skizze eines Beweises in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ angegeben. In $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$ kann man analog vorgehen.

Auf die entstehende Vereinigungsmenge V ist die Definition 1 anzuwenden. Sei x ein beliebiger Punkt von V , so liegt dieser in mindestens einer der offenen Mengen,

deren Vereinigung V darstellt. Nennen wir diese offene Menge T . Da T offen ist, gibt es eine Kreisscheibe $K(x, \epsilon)$ mit Zentrum x , die ganz in T liegt. T liegt ihrerseits wieder ganz in V . Somit liegt $K(x, \epsilon)$ ganz in V . x erfüllt also die in Definition 1 geforderte Bedingung. Da x beliebig angenommen war, gilt obiges für alle Punkte von V , somit ist V offen.

Wir können deshalb für die uns bekannten Mengen offener Mengen feststellen:

Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist wieder offen.¹⁾

Wir wollen einige Beispiele zu dieser Aussage sammeln und uns dabei an eine Abkürzung gewöhnen:

- a) In $\mathbb{R}^2$ sei um jeden Punkt $(x_1 | x_2)$ mit $x_1 \in \{1; 2; 3; 4\}$ und $x_2 = 0$ ein Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ gezeichnet (Skizze!) Die entstandenen offenen Kreisscheiben bezeichnen wir mit K_1, K_2, K_3, K_4 . Für die Vereinigung $K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$ führen wir die Abkürzung $\bigcup_{v=1}^4 K_v$ ein. (Der Gebrauch des Zeichens " $\cup$ " wird Sie an das Summenzeichen " $\sum$ " erinnern). Die angesprochene Vereinigungsmenge ist offen, also

$$\bigcup_{v=1}^4 K_v \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$$

- b) Zeichnen wir um jeden Punkt $(x_1 | x_2)$ mit $x_1 \in \mathbb{N}$ und $x_2 = 0$ Kreise mit Radius $\frac{1}{2}$, so erhalten wir eine Menge offener Kreisscheiben. Beschreiben Sie die Menge!

1) Indem wir den Ausdruck "beliebig viele" verwenden, fassen wir die ehemals gefundene Eigenschaft, die zwei offene Mengen bzw. drei, vier usw. betrifft, und die neu gefundene Eigenschaft, die unendliche viele offene Mengen betrifft, zusammen.

Die Vereinigung aller dieser Kreisscheiben

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \quad \text{oder} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$$

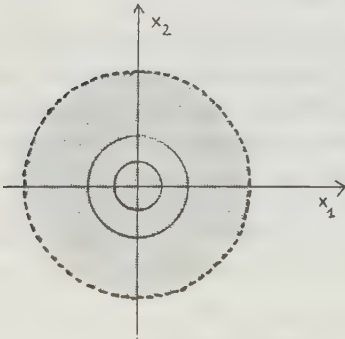
ist wieder eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$: $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$

- c) Im Beispiel auf S. 68 haben wir noch mehr ¹⁾ offene Kreisscheiben vereinigt und gesehen, daß gilt:

$$\bigcup_{i \in A} K_i \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$$

Klären wir nun die Frage, ob der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen wieder offen ist. Betrachten wir dazu wieder ein Beispiel aus $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{K}$ sei die Menge aller offener Kreisscheiben mit Zentrum $(0|0)$ und einem Radius, der kleiner oder gleich 2 cm ist.



Die Zeichnung gibt einige Kreisscheiben aus $\mathcal{K}$ wieder. Insgesamt gehören zu $\mathcal{K}$ unendlich viele Kreisscheiben.

1) Auf den Unterschied von "abzählbar unendlich viele" und "überabzählbar unendliche viele" wird auf S.184 ff noch eingegangen.

Der Durchschnitt aus all diesen offenen Kreisscheiben ist die Menge $\{z\}$ ¹⁾.

In Aufgabe 4c wurde gezeigt, daß die einpunktige Menge $\{z\}$ in $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j$ nicht offen ist.

Für den Durchschnitt von unendlich vielen offenen Mengen war unsere Vermutung also falsch, wie obiges Beispiel zeigt. Man kann zwar auch Beispiele angeben, die die Vermutung bekräftigen²⁾, jedoch verbietet schon ein einziges Gegenbeispiel, unsere Vermutung als allgemeine wahre Aussage zu behaupten.

Für die Durchschnittsbildung offener Mengen gilt demnach nur:

Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist wieder offen.

(Beweisskizze als Übung!)

-
- 1) Man kann mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises zeigen, daß die gefragte Durchschnittsmenge keinen von z verschiedenen Punkt enthalten kann. Dazu gehe man von der Annahme aus, es gäbe einen Punkt z' ($z' \neq z$) aus dem Durchschnitt. Da $d(z, z') > 0$ sein muß, gibt es $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2} d(z, z')$. z' liegt dann nicht in der offenen Kreisscheibe $K(z, \varepsilon)$, die aber zu $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j$ gehört. z' liegt also nicht in der Durchschnittsmenge.
- 2) Sei $\mathcal{K}$ die Menge aller offener Kreisscheiben mit dem gemeinsamen Zentrum $z = (0|0)$ und einem Radius s , der alle Werte zwischen 1 und 2 annehmen darf ($s \in [1; 2] \subseteq \mathbb{R}$). Der Durchschnitt aller Kreisscheiben aus $\mathcal{K}$ ist die offene Kreisscheibe $K(z, 1)$.

Die somit gefundenen Eigenschaften wollen wir zur Charakterisierung von gewissen Mengen offener Mengen heranziehen. Damit ist es möglich, nicht nur in $\mathbb{R}$, $\mathbb{J}$ und $\mathbb{G}$ Mengen von offenen Mengen zu erklären, sondern auch in beliebigen Mengen M .

(Machen Sie den Versuch bei der Menge $M = \{a, b, c, d\}$!)

Eine so erklärte Menge von offenen Mengen nennen wir dann eine Topologie. Unter Beachtung der oben zusammengestellten charakterisierenden Eigenschaften kann zu jeder beliebigen Menge eine Topologie angegeben werden. Eine Menge M zusammen mit einer auf ihr erklärten Topologie heißt topologischer Raum. Die Bedingungen (charakterisierenden Eigenschaften), die von der Menge von Teilmengen erfüllt sein müssen, die wir dann Menge der offenen Mengen bzw. Topologie nennen wollen, stellen ein Axiomensystem für topologische Räume dar.

2.1.3 Die Axiome und weitere Beispiele für topologische Räume

Das Axiomensystem

Eine Menge M und eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von M heißen topologischer Raum, wenn für $\mathcal{T}$ gilt:

- (01) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{T}$
- (02) Die Vereinigungsmenge beliebig vieler $T_i \in \mathcal{T}$ ist aus $\mathcal{T}$
- (03) Wenn $S_1 \in \mathcal{T}$ und $S_2 \in \mathcal{T}$, dann ist $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{T}$

Die Elemente von M heißen dann Punkte des topologischen Raumes und die Elemente von $\mathcal{T}$ offene Mengen des topologischen Raumes. $\mathcal{T}$ heißt eine Topologie auf M .

Anmerkung

Die Menge $\mathcal{T}$ ist stets eine Teilmenge der Potenzmenge von M (Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, das ist die Menge aller Teilmengen von M).

Mit Hilfe der Bezeichnung "offene Menge" für die Elemente von $\mathcal{T}$ werden die Axiome (01), (02) und (03) noch einprägsamer:

- (01) $\emptyset$ und M sind offene Mengen.
- (02) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge.
- (03) Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist eine offene Menge.

Wir sehen sofort, daß $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ den Axiomen genügt, also ein topologischer Raum ist, und ebenso $\mathbb{N}$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ und auch $\mathbb{C}$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{C}}$.

Können wir noch weitere Beispiele für topologische Räume finden?

Beispiel 1:

$$M = \{a, b, c\}; \quad \mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, M\}$$

(01) ist wie man sieht erfüllt

$$(02) \{a\} \cup \{b, c\} = M$$

$$\emptyset \cup \{a\} = \{a\}$$

$$\{b, c\} \cup M = M \quad \text{usw.}$$

Man sieht, daß die Vereinigungsmengen jeweils wieder aus $\mathcal{T}$ sind.

$$(03) \{a\} \cap \{b, c\} = \emptyset$$

$$\{a\} \cap M = \{a\}$$

$$\{b, c\} \cap M = \{b, c\} \quad \text{usw.}$$

Man sieht, daß die Durchschnittsmengen jeweils wieder aus $\mathcal{T}$ sind.

$(M, \mathcal{T})$ ist also ein topologischer Raum. Es ist wichtig zu bemerken, daß wir in M keine Abstandsfunktion $d(x, y)$ erklärt haben.

Anmerkung

Zu jeder beliebigen Menge M gibt es mindestens eine Topologie, und zwar: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, M\}$ (Man kann sich leicht klar machen, daß die Axiome (01), (02) und (03) erfüllt sind) und $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(M)$ (Die Potenzmenge erfüllt die 3 Axiome). Die Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ nennt man auch die trivialen Topologien von M . $\mathcal{T}_1$ bezeichnet man als die indiskrete Topologie. Sie weist die wenigsten offenen Mengen auf und heißt deshalb manchmal auch die kleinste Topologie von M . $\mathcal{T}_2$ heißt die diskrete Topologie oder weil sie die

meisten offenen Mengen aufweist die größte Topologie von M .

Wichtig!

Es kann auf einer Menge mehrere Topologien geben.

Gibt es zu einer Menge M zwei oder mehr Topologien (τ, σ , u.a.), so kann es vorkommen, daß Mengen, die in der einen Topologie offen sind, auch in der anderen offen sind. Wenn das für alle offenen Mengen der Topologie τ gilt (nämlich daß sie auch in der Topologie σ offen sind), so ist die Topologie τ Teilmenge der Topologie σ . Man führt folgende Bezeichnung dafür ein:

Definition 4

τ und σ seien zwei Topologien auf derselben Menge M . Wenn $\tau \subseteq \sigma$ gilt, so sagt man, die Topologie σ ist feiner als die Topologie τ oder auch: τ ist gröber als σ .

Beispiele 2 - 4:

- 2) Die beiden trivialen Topologien einer Menge M sind

$$\tau_1 = \{\emptyset, M\} \text{ und } \tau_2 = \mathcal{P}(M).$$

Die diskrete Topologie τ_2 ist feiner als die indiskrete Topologie τ_1 .

- 3) Da in jeder Topologie auf M die leere Menge und M vorkommen müssen, gilt für jede beliebige Topologie auf M : $\tau_1 \subseteq \tau$

Die indiskrete Topologie ist gröber als jede andere Topologie auf M . τ_1 ist die gröbste Topologie auf M .

- 4) Da jede Topologie auf M eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist (siehe Anmerkung Seite 73!), ist die diskrete Topologie τ_2 feiner als jede andere Topologie auf M . τ_2 ist die feinste Topologie auf M .

Beachte!

Es kann auf einer Menge M auch zwei verschiedene Topologien τ und τ^* geben, die nicht in Teilmengenbeziehung zueinander stehen (Beispiele siehe Aufgabe 13!)

Aufgabe 13:

Finde zu $M = \{a, b, c\}$ alle möglichen Topologien und stelle in einem Hasse-Diagramm die Ist-Größer-als-Beziehung dar.

Hinweis:

Das zugehörige Hasse-Diagramm hat 8 Zeilen. In der untersten Zeile steht die kleinste Topologie, in der zweiten Zeile von unten stehen die Topologien mit 3 offenen Mengen, usw., in der obersten Zeile steht die größte Topologie. Pfeile für die "ist größer als"-Beziehung sollen nur von jeder Zeile zu der genau über ihr liegenden gezogen werden. Man kann sich leicht klarmachen, daß zwei Topologien, die durch einen Pfeilzug¹⁾ miteinander verbunden sind, in der "ist größer als"-Beziehung stehen. Diese Relation ist transitiv.

Aufgabe 14:

Welches ist die größte Topologie auf $M = \{a, b, c, d, e\}$, in der die Mengen $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d, e\}$, offen sind?

Aufgabe 15:

- a) Suchen Sie zwei verschiedene, nicht triviale Topologien τ und τ^* auf der selben Menge $M = \{a, b, c, d\}$, die nicht in Teilmengenbeziehung zu einander stehen.

1) Zwei oder mehr aneinanderhängende Pfeile.

b) Bilden Sie den Durchschnitt $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^*$.

Was kann von den Teilmengen von M gesagt werden, die zu $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^*$ gehören?

c) Zeigen Sie, daß $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}^*$ wieder eine Topologie auf M ist.

Aufgabe 16:

Sei $M = \{a, b, c, d, e\}$ und seien

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, M\}$$

$$\mathcal{T}^\circ = \{\emptyset, \{c\}, \{c, d\}, M\}$$

a) Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}^\circ$ Topologien auf M ?

b) Ist $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^\circ$ eine Topologie auf M ?

Aufgabe 17:¹⁾

M sei eine beliebige Menge und $L \subseteq M$. Man zeige, daß

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(L) \cup \{M\} \text{ eine Topologie auf } M \text{ ist.}$$

Aufgabe 18:

M sei eine unendliche Menge und $\mathcal{T}$ enthalte außer $\emptyset$ und M alle Teilmengen A von M , deren Komplement²⁾ A' endlich ist³⁾. Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}$ eine Topologie von M ist.

Hinweis: Im Beweis benütze man die de Morganschen Regeln $(A \cup B)' = A' \cap B'$ und $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Diese gelten für beliebig viele Mengen entsprechend.

Aufgabe 19:

Finden Sie eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die nur endlich viele offene Mengen hat.

1) Entnommen aus dem Handbuch für Schulmathematik, Band 7, S. 75

2) Das Komplement (Komplementärmenge) A' der Menge A bezüglich M ist definiert als:
 $A' = M \setminus A = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\}$

3) Man nennt diese Teilmengen **k o f i n i t e** Teilmengen von M .

2.2 Weitere Begriffe in topologischen Räumen

2.2.1 Abgeschlossene Mengen

Vorbemerkung

Wir könnten versucht sein, alle nicht offenen Mengen in einer Topologie abgeschlossene Mengen zu nennen. Wir erfahren im täglichen Leben die Eigenschaften offen und abgeschlossen ja bekanntlich als Alternativen. Dem widerspricht jedoch in der Mathematik bereits der Gebrauch der Begriffe "offenes Intervall" und "abgeschlossenes Intervall". Intervalle, die keine offenen Intervalle sind, können z.B. halboffen sein, müssen also nicht zwangsläufig abgeschlossen sein.

In einem topologischen Raum legt man folgendermaßen fest, was man unter abgeschlossenen Mengen verstehen will:

Definition 5

In einem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ heißen die Komplementärmenge zu offenen Mengen abgeschlossene Mengen.

Wir fragen uns, ob "abgeschlossene Intervalle" oder "abgeschlossene Kreisscheiben" auch nach Definition 5 abgeschlossene Mengen in den jeweiligen topologischen Räumen sind.

Gehen wir von einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ in $\mathbb{R}$ aus, wobei $a < b$ sei. Die Komplementärmenge davon ist die Vereinigungsmenge aus zwei offenen Intervallen, die nach links bzw. nach rechts "unbegrenzt" sind:
 $(-\infty; a) \cup (b; \infty)$.

Dies ist die Vereinigung zweier offener Mengen (siehe Aufgabe 8!) und daher nach (O2) eine offene Menge. Also ist $[a, b]$ nach Definition 5 in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ eine abgeschlossene Menge.

Das Komplement einer "abgeschlossenen" Kreisscheibe

$$\bar{K}(z, \varrho) = \{x \mid d(x, z) \leq \varrho\}_{\mathcal{T}}$$

ist nebenstehend symbolhaft

dargestellt. Nach Definition 1

ist dies eine offene Menge in

$\tau_{\mathcal{T}}$. Somit ist $\bar{K}(z, \varrho)$ abgeschlossen in $(\mathcal{T}, \tau_{\mathcal{T}})$.



Beispiel 5:

Sei $M = \{a, b, c\}$ und $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, M\}$

In dieser Topologie ist $\{a\}$ offen, somit

$M \setminus \{a\} = \{b, c\}$ abgeschlossen.

Aufgabe 20:

a) Bilden Sie die Komplementärmenge zu jeder offenen Menge der Topologie des Beispiels 5. Fassen Sie die gefundenen abgeschlossenen Mengen der Topologie zu einer Menge zusammen. Wir wollen diese Menge mit $c\tau$ abkürzen.¹⁾

b) Für τ gilt bekanntlich:

Wenn $A \in \tau$ und $B \in \tau$, dann $A \cap B \in \tau$ und $A \cup B \in \tau$

Prüfen Sie durch Stichproben, ob für die Menge $c\tau$ des Beispiels 5 ähnliches gilt.

1) Der Buchstabe c soll darauf hinweisen, daß $c\tau$ aus den Komplementär Mengen der Mengen aus τ besteht:

$$c\tau = \{A' \mid A \in \tau\} = \{M \setminus A \mid A \in \tau\}$$

Die Bearbeitung von Aufgabe 20 führt uns zur allgemeinen Behauptung:

Satz 1:

Sei $(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum und

$A \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ und $B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$, dann gilt:

(1) $A \cap B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ sowie (2) $A \cup B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$

Beweis von (1):

Um zu zeigen $A \cap B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$, müssen wir nach Def. 5 zeigen $(A \cap B)' \in \mathcal{T}$. Dazu formen wir $(A \cap B)'$ mit Hilfe der de Morganschen Regel (siehe S. 77!) um: $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Nach Voraussetzung $A \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ und $B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$, d.h. nach Def. 5 $A' \in \mathcal{T}$ und $B' \in \mathcal{T}$. Daraus folgt nach Axiom (O2) $A' \cup B' \in \mathcal{T}$.
Damit $(A \cap B)' \in \mathcal{T}$ und $A \cap B \in \mathcal{C}\mathcal{T}$.

Aufgabe 21:

Führen Sie den Beweis der Behauptung (2) von Satz 1 selbständig durch.

Als Erweiterung des Satzes 1 und aus der Definition von $\mathcal{C}\mathcal{T}$ ergeben sich die Aussagen (A1), (A2), (A3):

Ist $(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum, dann gilt:

(A1) $\emptyset \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ und $M \in \mathcal{C}\mathcal{T}$

(A2) Die Durchschnittsmenge beliebig vieler $B_i \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ ist aus $\mathcal{C}\mathcal{T}$

(A3) Wenn $B_1 \in \mathcal{C}\mathcal{T}$ und $B_2 \in \mathcal{C}\mathcal{T}$, dann ist $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{C}\mathcal{T}$

Aufgabe 22:

Geg. $M = \{a, b, c, d\}$ und die Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c, d\}, M\}$

Stellen Sie die Menge $c\mathcal{T}$ aller in $(M, \mathcal{T})$ abgeschlossenen Mengen auf, indem Sie nebenstehende Tabelle benutzen.

Gibt es im topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind?

$A \in \mathcal{T}$	$A' \in c\mathcal{T}$
$\emptyset$	
$\{b\}$	
$\{c\}$	
$\{b, c\}$	
$\{a, c, d\}$	
M	

(Tabelle 1)

Aufgabe 23:¹⁾

Untersuchen Sie die Topologie der zurückliegenden Beispiele daraufhin, ob Mengen auftreten, die zugleich offen und abgeschlossen sind. Welche Mengen sind in jeder Topologie offen und abgeschlossen? Stimmt es, daß in der diskreten Topologie alle Mengen sowohl offen als auch abgeschlossen sind?

Gibt es Topologien mit einer ungeraden Anzahl von Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind?

Aufgabe 24:

Gegeben sei die in Aufgabe 14 gefundene Topologie $\mathcal{T}$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$. Stellen Sie $c\mathcal{T}$ auf und zeigen Sie, daß $c\mathcal{T}$ nicht gleich $\mathcal{P}(M) \setminus \mathcal{T}$ ist, also der Menge aller nicht-offenen Mengen.

Tabelle 1 soll deutlich machen, daß jeder offenen Menge eines topologischen Raumes durch die Definition 5 eine abgeschlossene Menge zugeordnet ist.

1) Man bearbeite zweckmäßigerweise vorher Aufgabe 22.

Im topologischen Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{X}})$ liegt aber z.B. noch eine andere Zuordnung nahe:

aus $\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$			aus $c\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$	
offene Kreisscheibe	$K(z, \varrho)$		$\bar{K}(z, \varrho)$	zugehörige abgeschlossene Kreisscheibe
offenes Quadrat	Q		$\bar{Q}$	zugehöriges abgeschlossenes Quadrat
offenes Rechteck	R		$\bar{R}$	zugehöriges abgeschlossenes Rechteck

(Tabelle 2)

Zwischen den Tabellen 1 und 2 läßt sich abgesehen von der Verschiedenheit der verwendeten topologischen Räume ein wesentlicher Unterschied feststellen:

In Tabelle 1 wird jeder Menge ihre Komplementärmenge zugeordnet.

In Tabelle 2 ist die links stehende offene Menge jeweils Teilmenge der rechts stehenden abgeschlossenen Menge. Z.B. $Q \subseteq \bar{Q}$.

Noch genauer charakterisiert steht jeder Menge der linken Spalte nicht irgendeine abgeschlossene Obermenge gegenüber, sondern die "kleinste" abgeschlossene Obermenge.

Wir setzen fest, was wir unter **kleinster Menge** in diesem Zusammenhang verstehen wollen.

Definition 6

Wenn es in einer Menge $\mathcal{A}$ von Mengen eine Menge B gibt, die Teilmenge von jedem $A \in \mathcal{A}$ ist, so heißt B die **kleinste Menge** aus $\mathcal{A}$.

Beispiele:

- a) In jeder Topologie $\mathcal{T}$ ist $\emptyset$ die kleinste Menge.
- b) In $\mathcal{A} = \{\{u,v\}, \{r,u,v\}, \{s,t,u,v\}, \{u,v,w\}\}$
ist $\{u,v\}$ das kleinste Element. $\{u,v\}$ ist die kleinste
der in $\mathcal{A}$ angegebenen Mengen.¹⁾
- c) Sei $\mathcal{J}$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle mit
ganzzahligen Randpunkten, die den Punkt $\frac{1}{2}$ enthalten.
Das kleinste Intervall von $\mathcal{J}$ ist $[0;1]$, denn es ist
Teilmenge jedes Intervalls aus $\mathcal{J}$.

Beispiel c) macht nochmals besonders deutlich, daß sich
die in Definition 6 eingeführte Bezeichnung "k l e i n -
s t e s" nicht auf die Anzahl der Elemente bezieht. Das
kleinste Intervall aus $\mathcal{J}$ wie alle anderen Intervalle aus
 $\mathcal{J}$ haben unendlich viele Elemente.

Aus den Beispielen wird auch klar, daß sich die kleinste
Menge in $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{J}$ leicht ermitteln läßt, nämlich
als D u r c h s c h n i t t aller Mengen aus $\mathcal{T}$
bzw. $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{J}$.²⁾

Aufgabe 26:

$(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum mit $M = \{a,b,c,d\}$ und
 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, M\}$

- a) Geben Sie zu jeder der unten angegebenen Mengen B_i die
Menge $\mathcal{O}_{B_i}$ aller abgeschlossenen Obermengen von B_i an.
 $B_1 = \{b,c\}$, $B_2 = \{d\}$, $B_3 = \{a,c\}$

-
- 1) Beachten Sie, daß nicht jede Menge von Mengen eine
kleinste Menge haben muß.
Beispiel: $\mathcal{L} = \{\{u,v\}, \{r,s,v\}, \{v,t\}, \{u,v,s\}\}$
Die einzige nicht-leere Menge, die in jedem $B \in \mathcal{L}$
als Teilmenge enthalten ist, ist $\{v\}$. $\{v\}$ gehört aber
nicht zu $\mathcal{L}$. Also besitzt $\mathcal{L}$ kein kleinstes Element.
 - 2) Dies gilt natürlich nur, sofern dieser Durchschnitt
in der gegebenen Menge von Mengen liegt. In obigem $\mathcal{L}$
ist der Durchschnitt $\{v\} \notin \mathcal{L}$.

- b) Geben Sie mit Hilfe von Definition 6 das kleinste Element von α_1 bzw. α_2 bzw. α_3 an!
- c) Entsprechend der Tabelle auf Seite 82 wollen wir diese kleinsten Mengen von α_1 (α_2 bzw. α_3) $\bar{B}_1$ ($\bar{B}_2$ bzw. $\bar{B}_3$) nennen.
Wären wir mittels Durchschnittsbildung zu denselben $\bar{B}_1$ gekommen?
- d) Beschreiben Sie, was $\bar{B}_1$ in Bezug auf B_1 ist.

Bezeichnung

Die kleinste abgeschlossene Menge, die eine Menge B als Teilmenge enthält, wollen wir **a b g e s c h l o s s e - n e H ü l l e** von B nennen und mit $\bar{B}$ abkürzen.

An Beispielen aus $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\mathbb{K}})$ und $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_{\mathbb{C}})$ wird die Bezeichnung auch anschaulich einleuchtend. (Füllen Sie selbst die Lücken richtig aus!)

In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist die abgeschlossene Hülle von $(1;3)$
und die abgeschlossene Hülle von $(0;7]$
und die abgeschlossene Hülle von $(-\infty;2)$

In $(\mathbb{K}, \mathcal{T}_{\mathbb{K}})$ ist die abgeschlossene Hülle von $K(z, \varrho)$,
und die abgeschlossene Hülle von
 $\{(x_1 | x_2) \mid -1 < x_1 < 1\}$, und die abgeschlossene Hülle von $\{(x_1 | x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 1 \wedge 0 \leq x_2 \leq 1\}$.

Satz 2:

In jedem topologischen Raum gilt:

Die abgeschlossene Hülle einer Menge B ist genau der Durchschnitt aller B enthaltenden abgeschlossenen Mengen.

Beweis:

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller abgeschlossenen Obermengen von B.

Zu zeigen:

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $\bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ | ist abgeschlossen | } d.h. $\bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} A_i \in \mathcal{A}$ |
| 2) $\bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ | ist Obermenge von B | |
| 3) $\bigcap_{A_i \in \mathcal{A}} A_i$ | ist Teilmenge von jedem Element aus $\mathcal{A}$ | |

1) gilt, siehe S. 80 unten!

2) gilt, denn jedes A_i ist Obermenge von B, also auch der Durchschnitt aller A_i .

3) gilt, denn der Durchschnitt ist stets Teilmenge aller an ihm beteiligten Mengen.

In Kapitel 2.4.1 werden wir noch mehr von der abgeschlossenen Hülle einer Menge erfahren.

2.2.2 Basis einer Topologie

In Kapitel 2.1.3 waren auch Übungsaufgaben folgenden Typs vertreten:

Auf der Menge $M = \{a, b, c, d, e\}$ ist die größte Topologie zu finden, für die die Mengen

(*) $\{\{a, b\}, \{d, e\}, \{b, c, d\}\}$ offene Mengen sind.

Die Arbeitsgänge, die zur Lösung der Aufgabe nötig sind in günstiger Reihenfolge:

(1) Zu den 3 gegebenen offenen Mengen werden alle möglichen Durchschnittsmengen aus je zwei von ihnen hinzugenommen:

(**) $\{\{a, b\}, \{d, e\}, \{b, c, d\}, \emptyset, \{b\}, \{d\}\}$

(2) Aus den entstandenen 6 Mengen werden alle möglichen Vereinigungsmengen beliebig vieler gebildet und an (**) angereiht

(***) $\{\{a, b\}, \{d, e\}, \{b, c, d\}, \{b\}, \{d\}, \emptyset, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

Wir prüfen nach, ob die gefundene Menge von Mengen (01) bis (03) erfüllt, und stellen fest, Zeile (**) stellt die gesuchte Topologie $\mathcal{T}$ dar.

Durch die Zeile (**) und die Anweisung (2) bezüglich der Vereinigungsmengenbildung ist $\mathcal{T}$ bereits festgelegt. Es würde also genügen (**) und die Anweisung (2) anzugeben, um $\mathcal{T}$ festzulegen.

Man kann die Beziehung zwischen (**) und $\mathcal{T}$ (d.i. (***)) auch so charakterisieren: Die Menge von Mengen in Zeile (**) ist eine Teilmenge von $\mathcal{T}$. Jede offene Menge aus $\mathcal{T}$ kann als Vereinigungsmenge von Mengen aus (**) dargestellt werden - wobei auch Vereinigungen aus null Mengen oder einer Menge erlaubt sein sollen.

Teilungen von Topologien, die für diese dasselbe leisten wie (**) für die Angabe von $\mathcal{T}$, wollen wir Basis¹⁾ einer Topologie nennen.

Definition 7

$(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B}$ von $\mathcal{T}$ heißt Basis der Topologie, wenn jede offene Menge aus $\mathcal{T}$ als Vereinigungsmenge von Mengen aus $\mathcal{B}$ darstellbar ist.

Für die in Zeile (***) angegebene Topologie $\mathcal{T}$ ist die Menge $\mathcal{B} = \{\{b\}, \{d\}, \{a,b\}, \{d,e\}, \{b,c,d\}\}$ eine Basis, wovon wir uns nochmals überzeugen. Die Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{A} = \{\{b\}, \{a,b\}, \{d,e\}, \{b,c,d\}\}$ ist keine Basis von $\mathcal{T}$, die offene Menge $\{a,b,d\}$ kann nicht durch Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ erzeugt werden.

Beispiel 6:

Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $M = \{a,b,c,d\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, M\}$, dann ist $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c,d\}\}$ eine Basis von $\mathcal{T}$.

Beispiel 7:

Die diskrete Topologie von $M = \{a,b,c,d\}$ hat als Basis $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$. Aber auch $\mathcal{B}' = \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$ ist eine Basis der diskreten Topologie $\mathcal{P}(M)$.

1) Man verwechsle diesen Begriff nicht mit dem Begriff "Basis eines Vektorraums". Außerdem sei erwähnt, daß der Mathematiker für die Menge von Mengen in Zeile (*) die Bezeichnung Subbasis verwendet.

Aufgabe 27:

Sei $M = \{a, b, c, d, e\}$ und

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, M\}.$$

Stellen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie auf!

(Hinweis: Es gibt nicht nur eine Basis)

Während bei den bisherigen Beispielen und Aufgabe 27 jeweils zu einer gegebenen Topologie eine Basis gesucht werden sollte, gibt Aufgabe 28 die Basis vor und läßt die Topologie ermitteln.

Aufgabe 28:

$\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{d, e, f\}\}$ ist eine Basis einer Topologie auf $M = \{a, b, c, d, e, f\}$. Ermitteln Sie die Topologie!

An den vorangegangenen Beispielen zeigt sich, daß nicht jede beliebige Teilmenge einer Topologie eine Basis dieser Topologie sein kann. Versuchen wir, allgemeine Eigenschaften zusammenzustellen, die jede Basis einer Topologie aufweist.

- 1) Da für alle Topologien gilt: $M \in \mathcal{T}$, muß M stets als Vereinigungsmenge von Mengen aus der Basis $\mathcal{B}$ darstellbar sein, das bedeutet schließlich:
Die Vereinigung aller zu $\mathcal{B}$ gehörenden Mengen muß M sein.
- 2) Die Aufgabe 27 und die Beispiele zeigen, daß es zu einer Topologie mehrere Basen geben kann. Dagegen ist definitionsgemäß durch die Vorgabe der Basis die zugehörige Topologie eindeutig bestimmt. Dies wird bei Abbildungen von topologischen Räumen noch eine Rolle spielen.
- 3) Siehe Fußnote 1 auf S. 90

Für die Topologien $\tau_{\mathbb{R}}, \tau_{\pi}, \tau_{\sigma}$ wird es später nützlich sein, handliche Basen zu besitzen. Stellvertretend wollen wir für τ_{π} die Fragestellung lösen. Einen Hinweis gibt uns Definition 1 - die Definition der offenen Mengen in τ_{π} . Sie führt uns zu der Behauptung:

Satz 3:

Die Menge $\mathcal{K}$ aller offenen Kreisscheiben in π stellt eine Basis der Topologie τ_{π} dar.

Beweis:

Zu zeigen ist: jede offene Menge ($\in \tau_{\pi}$) läßt sich als Vereinigungsmenge von offenen Kreisscheiben darstellen.

Sei $M \in \tau_{\pi}$ (nach Def. 1) zu jedem $p \in M$ gibt es mindestens eine Kreisscheibe $K(p, \varrho)$ mit Mittelpunkt p , die ganz in M liegt. Deshalb ist es möglich, zu jedem $p \in M$ genau eine Kreisscheibe mit Zentrum p zu wählen, für die gilt: $K(p, \varrho) \subseteq M$

Wir vereinigen alle diese ausgewählten Kreisscheiben, dann gilt:

$$(+) \quad M \subseteq \bigcup_{p \in M} K(p, \varrho)$$

Da für jede der Kreisscheiben gilt: $K(p, \varrho) \subseteq M$, gilt dies auch für die Vereinigungsmenge

$$(++) \quad \bigcup_{p \in M} K(p, \varrho) \subseteq M$$

Aus (+) und (++) zusammen folgt

$$\bigcup_{p \in M} K(p, \varrho) = M$$

M kann also als Vereinigungsmenge von offenen Kreisscheiben dargestellt werden. Dies gilt für jedes $M \in \tau_{\pi}$. Somit ist

nach Definition 7 die Menge $\mathcal{K}$ eine Basis von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.¹⁾

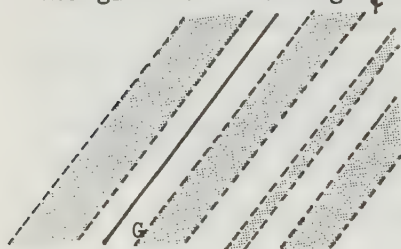
Aufgabe 29:

Beweisen Sie, daß die Menge $\mathcal{Q}$ aller offenen Quadrate in $\mathbb{R}^2$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ darstellt. (Hinweis: Jeder Kreisscheibe kann ein Quadrat einbeschrieben werden.)

Andere Basen der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ sind außerdem z.B. die Menge der offenen Dreiecke, die Menge der offenen Rechtecke und die Menge der offenen Sechsecke.

Indem man aus vorgegebenen offenen Mengen der Ebene alle möglichen Vereinigungsmengen bildet, kommt man nicht immer zur Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$. Dies wird an folgendem Beispiel deutlich:

Man gibt sich die Menge $\mathcal{P}$ aller offenen Parallelstreifen²⁾



einer bestimmten Richtung vor. Die Richtung der Parallelstreifen wird z.B. durch die Gerade G festgelegt. Die Breite der offenen Streifen und die Entfernung von G darf alle Werte annehmen.

- 1) An der Basis $\mathcal{K}$ von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ lesen wir eine weitere allgemeine Eigenschaft von Basen ab:
Der Durchschnitt je zweier Elemente aus einer Basis ist stets als Vereinigungsmenge aus Basiselementen darstellbar. An den zurückliegenden Beispielen läßt sich diese Eigenschaft ebenfalls nachweisen. Sie ist ferner - dies sei hier ohne Beweis angeführt - eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Menge $\mathcal{B}$ Basis einer Topologie ist. Die Zeile (*) von S. 86 erfüllt diese notwendige Bedingung nicht. (*) ist nicht Basis irgendeiner Topologie.
- 2) Unter einem Parallelstreifen wollen wir die Menge der Punkte aus $\mathbb{R}^2$ verstehen, die zwischen zwei verschiedenen parallelen Geraden liegen, jedoch nicht auf diesen.

Die Menge aller Vereinigungsmengen von beliebig vielen offenen Streifen aus $\mathcal{P}$ wollen wir mit $\mathcal{O}$ abkürzen.

Ist $\mathcal{O}$ eine Topologie?

- (01) $\emptyset \in \mathcal{O}$ und $\pi \in \mathcal{O}$, denn die Vereinigung von null Parallelstreifen (das ist $\emptyset$) liegt in $\mathcal{O}$ und die Vereinigung aller Parallelstreifen (d.i. π) liegt in $\mathcal{O}$.
- (02) Da die Bildung der Vereinigungsmenge assoziativ ist, liegt die Vereinigung beliebig vieler Punktmengen aus $\mathcal{O}$ (die ja durch Vereinigung von Parallelstreifen erzeugt sind) in $\mathcal{O}$.
- (03) Der Durchschnitt zweier Punktmengen aus $\mathcal{O}$ ist entweder $\emptyset$ (dann liegt er in $\mathcal{O}$) oder läßt sich wieder als Vereinigung offener Streifen darstellen (also aus $\mathcal{O}$)

Wir wollen für $\mathcal{O}$ den Namen "Streifentopologie" einführen.

$\mathcal{T}_\pi$ wird oft als die übliche Topologie von π bezeichnet.

Wir fragen uns, ob beide Topologien gleich¹⁾ sind. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir untersuchen

- 1) ob jede in $\mathcal{O}$ offene Menge auch in $\mathcal{T}_\pi$ offen ist.
- 2) ob jede in $\mathcal{T}_\pi$ offene Menge auch in $\mathcal{O}$ offen ist.

Zu 1): Ein offener Parallelstreifen ist nach Definition 1 offen in $\mathcal{T}_\pi$ (siehe Aufgabe 4). Da in $\mathcal{T}_\pi$ das Axiom (02) gilt, ist somit jede Menge aus $\mathcal{O}$ offen in $\mathcal{T}_\pi$, da sie Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{T}_\pi$ ist.

Zu 2): Es gelingt nicht, eine offene Kreisscheibe durch Vereinigung von offenen Parallelstreifen zu erzeugen. D.h.

$$\mathcal{T}_\pi \not\subseteq \mathcal{O}$$

1) Topologien sind Mengen. Um $\mathcal{T}_\pi = \mathcal{O}$ zu beweisen, muß die Gleichheitsdefinition für Mengen angewendet werden.

Aus dem Vorangegangenen sehen wir, daß wir mit $\mathcal{O}$ tatsächlich eine von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ verschiedene Topologie auf $\mathbb{R}$ gefunden haben. Es folgt aber auch, daß $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist, d.h. die Topologie $\mathcal{O}$ ist gröber als $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

Da es zu jeder Geraden G der Ebene eine zugehörige Streifentopologie $\mathcal{T}_G$ gibt ($\mathcal{T}_G \neq \mathcal{T}_H$ wenn $G \nparallel H$) können wir summarisch bemerken:

Satz 4

Streifentopologien sind gröber als die übliche Topologie von $\mathbb{R}$ und verschieden von dieser.

Diese Verschiedenheit zeigt sich auch noch bei der Untersuchung einer anderen Eigenschaft. Dazu legen wir uns nacheinander in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und in der Streifentopologie $\mathcal{T}_G$ die Aufgabe vor, zu zwei vorgegebenen Punkten x und y zwei disjunkte¹⁾ offene Mengen zu finden, von denen die eine x enthält und die andere den Punkt y . Einmal sei diese Aufgabe zu lösen, wenn x und y auf der Geraden G liegen, zum andern wenn x und y auf einer zu G senkrechten Geraden liegen.

Aufgabe 30:

- a) Zwei Punkte x und y der Ebene sollen auf der Geraden G liegen und den Abstand 2 cm voneinander haben. Geben Sie zwei offene Mengen O_x und O_y aus $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ an, so daß $x \in O_x$ und $y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$

1) disjunkte Mengen sind elementfremde Mengen; " A, B disjunkt" bedeutet $A \cap B = \emptyset$

b) a und b seien beliebige, verschiedene Punkte aus $\mathbb{R}$.

Geben Sie zwei offene Mengen O_a und O_b aus $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ an, so daß $a \in O_a$ und $b \in O_b$ und $O_a \cap O_b = \emptyset$.

Die Aufgabe 30b kann auch in allgemeinen topologischen Räumen $(M, \mathcal{T})$ gestellt werden, ist sie erfüllbar, so nennt man $(M, \mathcal{T})$ einen Hausdorff-Raum.

Definition 8

Der topologische Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum, wenn es zu je zwei beliebigen, verschiedenen Punkten a und b des Raumes je eine offene Menge $O_a \in \mathcal{T}$ und $O_b \in \mathcal{T}$ gibt, so daß $a \in O_a$ und $b \in O_b$ und $O_a \cap O_b = \emptyset$.

Bei der Lösung von Aufgabe 30 ergab sich, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist ein Hausdorff-Raum. Es fragt sich nun, ob $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$ ebenfalls ein Hausdorff-Raum ist. Vor der Beantwortung nehmen wir uns Aufgabe 31 vor.

Aufgabe 31:

a) Die Punkte x und y seien die aus Aufgabe 30a.¹⁾

Gibt es zu diesen je eine offene Menge $O_x \in \mathcal{T}_G$ und $O_y \in \mathcal{T}_G$ so daß gilt: $x \in O_x$ und $y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$?

b) Gegeben seien zwei Punkte c und d , die auf einer zur Geraden G senkrechten Geraden H liegen und den Abstand 2 cm voneinander haben sollen. Gibt es zu c und d je eine offene Menge $O_c \in \mathcal{T}_G$ und $O_d \in \mathcal{T}_G$, so daß gilt: $c \in O_c$ und $d \in O_d$ und $O_c \cap O_d = \emptyset$?

1) G sei die zur Definition der Topologie $\mathcal{T}_G$ verwendete Gerade.

- c) Beantworten Sie anhand von a) und b) ob $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_G)$ ein Hausdorff-Raum ist.

Aufgabe 32:

Zeigen Sie: Die diskrete Topologie ist die einzige hausdorffsche Topologie auf einer endlichen Menge.

Bemerkung

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist ein Hausdorff-Raum. (Begründung als Übung!)
Es gibt jedoch auf $\mathbb{R}$ auch nicht-hausdorffsche Topologien. Eine nicht-hausdorffsche Topologie ist z.B. die Menge der Vereinigungen von solchen offenen Intervallen, die den Punkt 0 enthalten. (Begründung als Übung!)
Ein weiteres Beispiel findet sich auf S. 141.

2.2.3 Metrische Räume

Die Topologien $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ und $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3}$ weisen Gemeinsamkeiten auf. Sie sind in unserem Lehrgang jeweils durch Angabe einer Basis festgelegt worden (in den Definitionen 1, 2 und 3). Aber auch die genannten Basen selbst ähneln einander. Auf Seite 63 haben wir deshalb für die Elemente der Basen von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ und $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3}$ einen gemeinsamen Namen eingeführt, nämlich "Kugel". Sie heißen oft auch "Kugelumgebungen". Die Schreibweise der Kugelumgebungen ist in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ gleich, nämlich

$$K(z, \varrho) = \{x \mid d(x, z) < \varrho\}$$

wobei z das Zentrum und $\varrho > 0$ der Radius der Kugelumgebung ist. Die Punktmengen, die durch obige Beschreibung gegeben sind, unterscheiden sich natürlich je nachdem, welche Grundmenge man vorgibt - ob $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ oder $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ¹⁾ usw.

In welchem Raum man sich aber auch immer befindet, die obige Beschreibung kommt nicht ohne eine Distanzfunktion $d(x, y)$ aus. Ob es gelingt, auch in anderen Mengen als $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ topologische Räume mit Hilfe von Kugelumgebungen zu erklären, hängt davon ab, ob wir Distanzfunktionen auch in beliebigen anderen Mengen erklären können. Dazu müssen wir die wesentlichen gemeinsamen Merkmale der Distanzfunktionen in den Räumen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ aufzählen.

1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird oft mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert; der Exponent zeigt dann die Dimension des Raumes an.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird mit $\mathbb{R}^3$ identifiziert.

Je zwei Punkten x und y des Raumes wird ihre Entfernung voneinander zugeordnet. Dies ist eine reelle Zahl, die größer oder gleich Null ist, aber nie kleiner Null. Anders ausgedrückt: Jedem Punktepaar wird ein Element aus $\mathbb{R}_0^+$ zugeordnet.¹⁾

$$(x|y) \longmapsto d(x,y) \quad 2)$$

Welche besonderen Eigenschaften hat diese Abbildung?³⁾

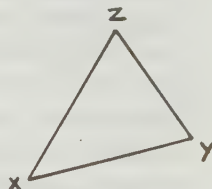
In allen drei Räumen gilt für $d(x,y)$, daß die Entfernung zweier Punkte nur dann Null ist, wenn diese zusammenfallen.

$$(1) \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

Eine weitere allgemeine Eigenschaft der Abbildung ist uns so selbstverständlich, daß sie uns kaum noch auffällt. Es ist die Tatsache, daß die Entfernung von x nach y gleich der Entfernung von y nach x ist. Die Distanzfunktion ist bezüglich der Argumente x und y symmetrisch.

$$(2) \quad d(x,y) = d(y,x) \quad \text{für alle Punkte } x \text{ und } y$$

In $\mathbb{I}$ fällt eine weitere Eigenschaft der Distanzfunktion besonders auf, wenn wir ein Dreieck mit den Ecken x, y, z "ausmessen". Man erhält die Erkenntnis, daß der "Umweg" länger ist als der "direkte Weg".



1) $\mathbb{R}_0^+ = \{x | x \geq 0\}_{\mathbb{R}}$

2) $(x|y)$ bedeutet ein Punktepaar, also ein geordnetes Paar aus zwei Punkten des jeweiligen Raumes. $(x|y)$ kann aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, aus $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ oder aus $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ sein, je nachdem, welchen der 3 Räume $\mathbb{R}, \mathbb{I}$ oder $\mathcal{G}$ man wählt. Allgemein: $(x|y) \in M \times M$, wobei M die Menge der Punkte des jeweiligen Raumes ist.

3) d ist tatsächlich eine Abbildung von $M \times M$ nach $\mathbb{R}_0^+$, wobei M für $\mathbb{R}, \mathbb{I}$ oder $\mathcal{G}$ steht. Definition des Abbildungsbegriffes siehe Seite 174

Dies drückt sich in der sogenannten "Dreiecksungleichung" aus:

$$(3) \quad d(x,y) + d(x,z) \geq d(x,z) \quad \text{für alle Punkte } x,y,z$$

Es zeigt sich nun, daß die Eigenschaften (1), (2) und (3) auch für andere "Abstandsfunktionen"¹⁾ der Ebene $\mathbb{A}$ gelten. Zum Beispiel für $d_1(x,y)$:

Der Punkt $x \in \mathbb{A}$ habe die Koordinaten $(x_1|x_2)$ und der Punkt $y \in \mathbb{A}$ die Koordinaten $(y_1|y_2)$. Je zwei Punkten x und y der Ebene wird die positive reelle Zahl zugeordnet, die man erhält, wenn man das Maximum von $|x_1 - y_1|$ und $|x_2 - y_2|$ ermittelt.

Sei $d_1 : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit
 $d_1(x,y) = \max \{ |x_1 - y_1| ; |x_2 - y_2| \}$

Beispiel 8:

$x = (3|-1)$; $y = (-2|-7)$ dann ist $d_1(x,y) = \max \{ |3 - (-2)|, |-1 - (-7)| \} = 6$
 Wir wollen nun zeigen, daß auch $d_1(x,y)$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) erfüllt.

$$\begin{aligned} (1) \quad d_1(x,y) = 0 &\Rightarrow \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x_1 - y_1| = 0 \text{ und } |x_2 - y_2| = 0 \Rightarrow x_1 = y_1 \text{ und } x_2 = y_2 \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad d_1(x,y) &= \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \} = \\ &= \max \{ |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2| \} = d_1(y,x) \end{aligned}$$

(3) Für $x = (x_1|x_2)$, $y = (y_1|y_2)$ und $z = (z_1|z_2)$ gilt:

$$x_1 - y_1 = (x_1 - z_1) + (z_1 - y_1) ; \quad x_2 - y_2 = (x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)$$

Da in $\mathbb{R}$ gilt: $|a+b| \leq |a| + |b|$, folgt somit:

$$|x_1 - y_1| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| ; \quad |x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$$

1) Die Bezeichnung ist in Anführungszeichen gesetzt, da wir erst nachdem wir (1), (2), (3) verifiziert haben, zu den in Frage kommenden Abbildungen Abstandsfunktionen sagen dürfen.

Dann ist aber auch:

$$\max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \} \leq \max \{ |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \}$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist aber außerdem

$$\leq \max \{ |x_1 - z_1|, |x_2 - z_2| \} + \max \{ |z_1 - y_1|, |z_2 - y_2| \}$$

Das kann man sich in $\mathbb{R}$ leicht klar machen. Damit folgt aber,

$$\text{daß } d_1(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

Ein weiteres Beispiel für eine "Abstandsfunktion" in $\mathbb{I}$ findet man in $d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Auch $d_2(x, y)$ erfüllt die Eigenschaften (1), (2) und (3).

$$\text{Sei } d_2 : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Beispiel 9:

$$x = (2|-4), y = (8|2); d_2(x, y) = |2-8| + |-4-2| = 12$$

Aufgabe 33:

Zeigen Sie allgemein, daß $d_2(x, y)$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat.

Auf ähnliche Weise kann nun nicht nur auf $\mathbb{I}$ sondern auf beliebigen Mengen eine "Abstandsfunktion" erklärt werden. Dabei müssen die Eigenschaften (1), (2) und (3) beachtet werden. Wir können also folgende allgemeine Definition zugrunde legen:

Definition 9

Eine Abbildung d einer Menge $M \times M$ ¹⁾ nach $\mathbb{R}_0^+$ heißt

Abstandsfunktion oder Metrik auf M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x \in M, y \in M$
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für alle $x \in M, y \in M, z \in M$

1) $M \times M := \{ (x|y) \mid x \in M \wedge y \in M \}$

Beispiel 10:

$M = \{a, b, c\}$ und sei $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{wenn } x \neq y \end{cases}$

$M \times M = \{(a|a), (a|b), (a|c), (b|a), (b|b), (b|c), (c|a), (c|b), (c|c)\}$

Durch obiges $d(x, y)$ wird jedem geordneten Paar aus $M \times M$ eine Zahl zugeordnet - entweder 0 oder 1.

$d(a, a) = 0 \quad d(b, b) = 0 \quad d(c, c) = 0$

$d(a, b) = 1 \quad d(a, c) = 1 \quad d(b, c) = 1$

$d(b, a) = 1 \quad d(c, a) = 1 \quad d(c, b) = 1$

Es ist offensichtlich, daß die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind. Wie steht es mit (3)?

Die Aussage $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ ist wahr, denn $1 \leq 2$. Ebenso ist wahr $d(a, c) \leq d(a, a) + d(a, c)$

Auch alle weiteren Aussagen der Form $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ erweisen sich bei Ersetzen der x, y, z durch beliebige Elemente aus M als wahr. Die obige Funktion $d(x, y)$ ist tatsächlich eine Abstandsfunktion.

Definition 10

Eine Menge M zusammen mit einer Abstandsfunktion auf M heißt **m e t r i s c h e r R a u m**.
 M heißt auch Trägermenge der Metrik.

Beispiele 11 bis 15:

- 11) Die euklidische Ebene zusammen mit der üblichen Abstandsfunktion ist ein metrischer Raum $(\mathbb{R}, d)$
- 12) Die euklidische Ebene mit der auf S. 97 definierten Abstandsfunktion d_1 ist ein metrischer Raum $(\mathbb{R}, d_1)$
- 13) Ebenso ist $(\mathbb{R}, d_2)$ ein metrischer Raum. d_2 sei die auf Seite 98 definierte Abstandsfunktion auf $\mathbb{R}$.

Es ist zu beachten, daß wir hier drei verschiedene metrische Räume vor uns haben - obwohl die Menge $\mathbb{I}$ in allen drei Fällen die Trägermenge ist. Wir haben es jeweils mit anderen Metriken zu tun.

14) $M = \{a, b, c\}$ mit der Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ wobei

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{wenn } x \neq y \end{cases}$$

ist ein metrischer Raum (siehe Beispiel 10!)

15) $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist ein metrischer Raum.

Folgende Angaben liefern keine metrischen Räume
(Beweis: als Aufgabe 34!):

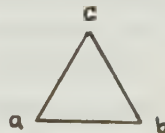
a) $\mathbb{R}$ mit der Funktion $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x, y) = |x^2 - y^2|$

b) $\mathbb{R}$ mit der Funktion $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > y \\ y - 1 & \text{für } x \leq y \end{cases}$

c) $\mathbb{I}$ mit der Funktion $d : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x, y) = |x_1 - y_1|$
wenn $x = (x_1 | x_2)$ und $y = (y_1 | y_2)$.

Bei metrischen Räumen, deren Abstandsfunktion vom anschaulichen Entfernungsbegriff abweicht, möchte man sich manchmal trotzdem ein anschauliches Bild der Abstandsverhältnisse in diesen Räumen machen. Man kann z.B. versuchen, ein Modell zu entwerfen, das die Abstandsverhältnisse widerspiegelt.

Für Beispiel 14 spiegelt die Teilmenge von $\mathbb{I}$, die aus den 3 Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks besteht, die Abstandsverhältnisse in (M, d) wider:



Aufgabe 35:

Sei $S = \{r, s, t, u\}$ und Abbildung $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = y \\ 1 & \text{wenn } x \neq y \end{cases}$$
. Stellt (S, d) einen metrischen Raum dar? Wie könnte man die Abstandsverhältnisse in (S, d) durch ein Modell veranschaulichen?

In metrischen Räumen (M, d) können "Kugelumgebungen" definiert werden. Es sind folgende Punktmengen:

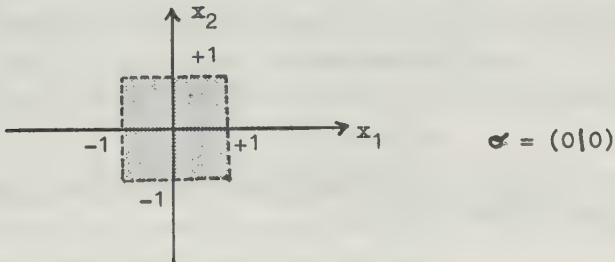
Definition 11

Im metrischen Raum (M, d) heißt

$K(z, \varrho) = \{x \in M \mid d(z, x) < \varrho\}$ Kugelumgebung von z

Beispiel 16:

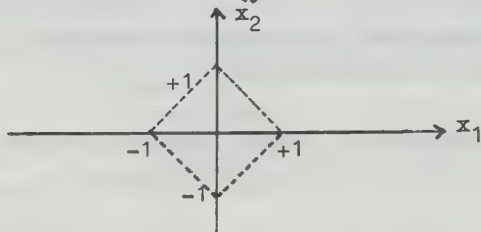
In $(\mathbb{R}, d_1)$ (d_1 siehe S.97!) erhalten wir folgende Punktmenge für $K(\sigma, 1) = \{x \mid d_1(\sigma, x) < 1\}_{\mathbb{R}}$



denn: $d_1(\sigma, x) < 1 \Leftrightarrow \max \{|x_1 - 0|; |x_2 - 0|\} < 1 \Leftrightarrow$
 $|x_1 - 0| < 1 \wedge |x_2 - 0| < 1 \Leftrightarrow |x_1| < 1 \wedge |x_2| < 1$

Beispiel 17:

In $(\mathbb{I}, d_2)$ (d_2 siehe S.98) erhalten wir für
 $K(\sigma, 1) = \{x \mid d_2(\sigma, x) < 1\}$ folgende Punktmenge



$$\text{denn: } d_2(\sigma, x) < 1 \iff |x_1 - 0| + |x_2 - 0| < 1 \iff \\ |x_1| + |x_2| < 1$$

Diese Ungleichung wird von den Koordinaten folgender Punkte erfüllt:

- im 1. Quadranten (wo $x_1 > 0$ und $x_2 \geq 0$ ist) von den Punkten mit $x_1 + x_2 < 1$
- im 2. Quadranten (wo $x_1 \leq 0$ und $x_2 > 0$ ist) von den Punkten mit $-x_1 + x_2 < 1$
- im 3. Quadranten (wo $x_1 < 0$ und $x_2 \leq 0$ ist) von den Punkten mit $-x_1 - x_2 < 1$
- im 4. Quadranten (wo $x_1 \geq 0$ und $x_2 < 0$ ist) von den Punkten mit $x_1 - x_2 < 1$

Die Vereinigung der vier Punkt Mengen ergibt das oben gezeichnete offene Quadrat.

Beispiel 18:

Im metrischen Raum $M = \{a, b, c\}$ mit der Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

ermitteln wir ebenfalls Kugelumgebungen:

$$K(a, 1) = \{x \mid d(a, x) < 1\} = \{a\}$$

$$K(a, 2) = \{x \mid d(a, x) < 2\} = \{a, b, c\}$$

$$K(a, \varepsilon) = \{a\} \quad \text{für } 0 < \varepsilon \leq 1$$

$$K(a, \delta) = \{a, b, c\} \quad \text{für } 1 < \delta$$

Entsprechendes gilt für Kugelumgebungen mit den Punkten b und c als Zentrum.

Die Kugeln (Kugelumgebungen) spielten in den metrischen Räumen $(\mathbb{I}, d)$ und $(\mathbb{R}, d)$ eine wichtige Rolle. Sie dienten dazu, in $\mathbb{I}$ bzw. $\mathbb{R}$ offene Mengen zu definieren, also dazu, $\mathbb{I}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ und $\mathbb{R}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ zu versehen. Dabei stellt jeweils die Menge der Kugelumgebungen eine Basis der Topologie dar. Auf entsprechende Weise können alle metrischen Räume mit einer Topologie versehen werden.

Beispiel 19:

Den metrischen Raum (M, d) aus Beispiel 14

$$M = \{a, b, c\} \quad \text{und} \quad d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

versehen wir mit einer Topologie wie folgt:

In (M, d) werde die Menge $\mathcal{K}$ aller Kugelumgebungen aufgestellt (vgl. hierzu Beispiel 18)

$$\mathcal{K} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}\}$$

Ermitteln wir alle möglichen Vereinigungsmengen von beliebig vielen Kugelumgebungen aus $\mathcal{K}$. $\mathcal{T}$ sei die Menge aller dieser Vereinigungsmengen:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$$

Wir sehen sofort, daß die Menge $\mathcal{T}$ eine Topologie auf

$M = \{a, b, c\}$ ist, denn $\mathcal{T}$ ist die diskrete Topologie $\mathcal{P}(M)$.

Satz 5

Jeder metrische Raum kann so mit einer Topologie versehen werden, daß die Menge der im metrischen Raum definierten Kugelumgebungen eine Basis der Topologie ist.

Beweisskizze:

Für die so festgelegte Menge von Vereinigungsmengen aus Kugelumgebungen ist zu zeigen, daß (01), (02) und (03) gilt.

Bezeichnung

Die Topologie, die zu einem metrischen Raum (M, d) wie in Satz 5 beschrieben, erklärt werden kann, heißt auch die auf M durch die Metrik d induzierte Topologie.

Jede beliebige Menge M bildet zusammen mit der Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x, y) = 0$ für $x = y$ und $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ einen metrischen Raum. Die von dieser Metrik d auf M induzierte Topologie ist stets die **d i s k r e t e** Topologie. (Begründung als Übung!)

Die auf $\mathbb{I}$ durch die Metrik d_1 (siehe S.97) induzierte Topologie ist $\tau_{\mathbb{I}}$. Ebenso ist die auf $\mathbb{I}$ durch die Metrik d_2 (siehe S.98) induzierte Topologie gleich $\tau_{\mathbb{I}}$. (Zur Begründung dienen die Beispiele 16 und 17 sowie die Überlegungen von S. 90 ff über Basen von $\tau_{\mathbb{I}}$)

Die Umkehrung des Satzes 5 wird von den Mathematikern in die Frage gekleidet: "Ist jeder topologische Raum **m e t r i s i e r b a r** ?"

Der Ausdruck "metrisierbar" ist nicht so zu verstehen, daß man fragt: "Kann auf der Menge M aller Punkte eines topologischen Raumes (M, τ) irgendeine Metrik erklärt werden?" Dies ist bekanntlich unter Benützung der Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$ stets möglich.

Vielmehr soll unter Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes (M, τ) die Möglichkeit verstanden werden, auf M eine Metrik d so zu erklären, daß die von dieser Metrik d auf M induzierte Topologie gerade die Topologie τ ist. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, wann ein topologischer Raum metrisierbar ist, war für die Mathematiker ein Problem, das in vielen wissenschaftlichen Arbeiten behandelt wurde. Mathematiker in aller Welt arbeiteten zu verschiedenen Zeiten daran: P.S. Alexandroff, P. Urysohn, R.H. Bing, M. Nagata, Y.M. Smirnow, um nur einige zu nennen. 1951 veröffentlichte Smirnow den Aufsatz mit dem Titel: "A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space". Zum Verständnis der Sätze und Beweise, die Metrisation von topologischen Räumen betreffend, sind Begriffe nötig, die im vorliegenden Kurs nicht behandelt werden.¹⁾

1) Informieren Sie sich näher über die betreffenden Sätze in der Fachliteratur. Hinweise auf einige Lehrbücher siehe S. 222

2.2.4 Umgebungen eines Punktes

Im vorangegangenen Abschnitt war immer wieder die Rede von Kugeln - genauer von Kugelumgebungen eines Punktes z .

$$K(z, \varrho) = \{x \mid d(x, z) < \varrho\}$$

Die Bevorzugung der Kugelgestalt bei Umgebungen eines Punktes erscheint einseitig. Auch anders "geformte" Punktmengen sollen Umgebungen des Punktes z genannt werden dürfen, z.B.:



Man legt deshalb allgemein fest:

Definition 12

Gegeben sei ein metrischer Raum (M, d) . Liegt außer dem Punkt z noch eine ganze Kugelumgebung von z in der Punktmenge U , so heißt U Umgebung von z .

Definition 12 in Kurzform

(M, d) metrischer Raum; $U \subseteq M$

U Umgebung von z : $\Leftrightarrow z \in U \wedge \bigvee_{\substack{\varrho > 0 \\ \varrho \in \mathbb{R}}} K(z, \varrho) \subseteq U$

Aufgabe 36:

Gegeben sei der metrische Raum (M, d) von Beispiel 19 (S. 103). Stellen Sie zunächst alle Kugelumgebungen von a auf und dann alle Umgebungen von a .

Bei der Beschäftigung mit Aufgabe 36 sehen wir, daß ein Punkt mehrere Umgebungen haben kann. Man faßt alle Umgebungen eines Punktes zu einer Menge zusammen; diese Menge nennt man das Umgebungssystem von a .

Definition 13

In einem metrischen Raum (M, d) heißt die Menge

$$\mathcal{U}_a := \{U \mid U \subseteq M \text{ und } U \text{ ist die Umgebung des Punktes } a \in M\}$$

Umgebungssystem des Punktes a .

Aufgabe 37:

Im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ seien folgende Punktmengen daraufhin zu untersuchen, ob sie Umgebungen des Punktes $z = 2$ sind:

$$(0; 4) \quad , \quad [2; 7] \quad , \quad (-1; 0) \cup (1, 8; 3, 2)$$

$$(2; 3) \quad , \quad [1, 98; \infty) \quad , \quad [1; 2, 5]$$

$$[0, 83; 1, 02] \cup [1, 52; 3, 52]$$

Aufgabe 38:

Auf der Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei die Metrik

$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ definiert, wobei

$x = (x_1 | x_2)$ und $y = (y_1 | y_2)$. (Siehe hierzu auch S. 98)

a) Zeichnen Sie jeweils einzeln folgende Kugelumgebungen heraus:

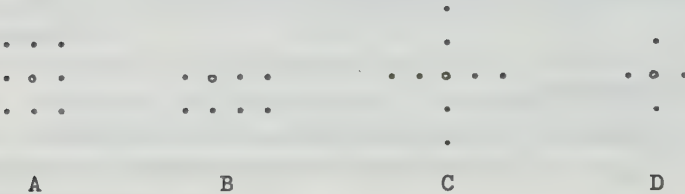
$$K(x_0, 1)$$

$$K(x_0, 2)$$

$$K(x_0, 3)$$

Der Punkt x_0 habe die Koordinaten $(3 | 4)$.

b) Stellen folgende Punktmengen (im Maßstab 2 : 1 gezeichnet) Umgebungen des Punktes x_0 (rot eingezeichnet) dar? Welche davon sind Kugelumgebungen?

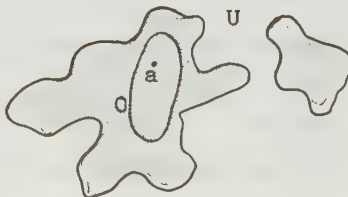


Da man in allgemeinen topologischen Räumen nicht von einer Metrik ausgeht, kann man sich zur Definition von Umgebungen eines Punktes z in einem topologischen Raum nicht der Kugelumgebung $K(z, \xi)$ bedienen. Man bedient sich stattdessen einer topologischen Eigenschaft der Kugelumgebungen, nämlich der, offene Mengen zu sein. Man definiert somit:

Definition 14

In einem topologischen Raum (M, τ) heißt eine Menge U Umgebung des Punktes a , wenn sie eine offene Menge O enthält, in der der Punkt a liegt.

Schema:



Definition 14 in Kurzform

(M, γ) topologischer Raum

U Umgebung von a : $\Leftrightarrow \bigvee_{0 \in \gamma} a \in 0 \wedge 0 \subseteq U$

In topologischen Räumen soll die Abkürzung $\mathcal{U}_a$ für das Umgebungssystem des Punktes a beibehalten werden.

Aufgabe 39:

Im topologischen Raum der Aufgabe 14 (S. 76) stelle man die Umgebungssysteme $\mathcal{U}_b$ und $\mathcal{U}_d$ auf.

Umgebungssysteme haben für die Definition der Konvergenz von Folgen besondere Bedeutung, wie wir in 2.3.2 sehen werden. Deshalb ist es nützlich, Mittel zur Hand zu haben, die das Aufstellen der Umgebungssysteme erleichtern. Aus diesem Grund stellen wir hier die allgemeinen Eigenschaften von Umgebungssystemen zusammen:

Wir beantworten dazu folgende Fragen, zu denen wir durch die Betrachtung der in Aufgaben 36 bis 39 ermittelten Umgebungssysteme angeregt werden:

a) Ist es wahr, daß für jedes Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ gilt: $\emptyset \notin \mathcal{U}_a$

Antwort und deren Begründung als Aufgabe 40 a!

b) Ist es wahr, daß für jedes Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ gilt: $\mathcal{U}_a \neq \emptyset$

Antwort und deren Begründung als Aufgabe 40 b!

c) Ist es wahr, daß für jedes Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ gilt:

Jede Obermenge einer Umgebung von a ist wieder Umgebung des Punktes a .

Kurzform der Aussage als Aufgabe! Antwort und deren Begründung als Aufgabe 40 c!

- d) Ist es wahr, daß für jedes Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ gilt:
 Der Durchschnitt zweier Umgebungen von a ist nicht leer.
 Antwort und Begründung als Aufgabe 4o d!
- e) Ist es wahr, daß für jedes Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ gilt:
 Der Durchschnitt zweier Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a .
 Antwort und Begründung als Aufgabe 4o e!
- f) Ist es wahr, daß für jedes Umgebungssystem $\mathcal{U}_a$ gilt:
 Die Vereinigung zweier Umgebungen von a ist wieder eine Umgebung von a .
 Antwort und Begründung als Aufgabe 4o f!

Die obigen allgemeinen Eigenschaften a) bis f) eines Umgebungssystems verwenden wir gleich im folgenden Beispiel zur Kontrolle der Vollständigkeit der Umgebungssysteme.

Beispiel 2o:

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \{d\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \\ \{a, b, c, d\}, \{a, d\}, M\}$$

$$\mathcal{U}_b = \{\{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, M\}$$

$$\mathcal{U}_e = \{\{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \\ \{b, c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, M\}$$

$$\mathcal{U}_d = \{U \mid U \subseteq M \wedge d \in U\}, \text{ d.h. die Menge aller Teilmengen von } M, \text{ die den Punkt } d \text{ enthalten.}$$

An Beispiel 2o gewinnen wir weitere Erkenntnisse. Wir fragen, welche Umgebungen von b zugleich offene Mengen sind. Unterstreichen Sie die offenen Mengen, die in $\mathcal{U}_b$ vorkommen!

Tun Sie bei $\mathcal{U}_e$ das gleiche!

Unterstreichen Sie nun andersfarbig die abgeschlossenen Mengen, die in $\mathcal{U}_b$ und $\mathcal{U}_e$ vorkommen!

Wir erkennen: Unter den Umgebungen eines Punktes gibt es solche, die offene Mengen sind, aber auch solche, die nicht-offen sind.

Bezeichnung:

Die Umgebungen eines Punktes p , die zugleich offene Mengen sind, heißen **o f f e n e U m g e b u n g e n** von p .

Wir fragen außerdem noch nach Umgebungen, die sowohl in $\mathcal{U}_e$ als auch in $\mathcal{U}_d$ vorkommen, und nach solchen, die gleichzeitig in $\mathcal{U}_b$ und $\mathcal{U}_e$ vorkommen. $\{b, c, d, e\}$ ist sowohl Umgebung von b als auch von e , dagegen ist $\{b, d, e\}$ zwar Umgebung von e aber nicht von b , obwohl b in der Menge $\{b, d, e\}$ vorkommt. M kommt in jedem Umgebungssystem vor.

Wir wollen unser Augenmerk weiter auf eine andere Tatsache richten: $\{d, e\}$ ist sowohl Umgebung von d als auch von e , also Umgebung jedes Punktes, der in ihr vorkommt. $\{b, c, d, e\}$ ist sowohl Umgebung von b als auch von e , als auch von d . Man überlegt sich leicht, daß $\{b, c, d, e\}$ auch Umgebung von c ist. Also haben wir auch für $\{b, c, d, e\}$ festzustellen, daß diese Menge Umgebung jedes Punktes ist, der in ihr vorkommt. Wir vermuten nun, daß das für alle Umgebungen zutrifft. Wir fragen uns deshalb:

Ist es wahr, daß in jeder Topologie gilt:

Jede Umgebung eines Punktes a ist auch Umgebung aller anderen in ihr vorkommenden Punkte?

Aufgabe 41:

Obige Frage ist mit $n \in \mathbb{N}$ zu beantworten. Finden Sie in der Topologie des Beispiels 20 eine Umgebung U des Punktes e , in der ein weiterer Punkt x vorkommt, für den U aber nicht Umgebung ist.

Oben haben wir andererseits festgestellt, daß in der Topologie $(M, \mathcal{T})$ des Beispiels 20 die Menge $\{b, c, d, e\}$ Umgebung aller ihrer Punkte ist. $\{b, c, d, e\}$ ist in $\mathcal{T}$ eine offene Menge. Für $\{d, e\}$ gilt dasselbe. Wir vermuten deshalb folgende Aussage:

Satz 6

Jede offene Menge einer Topologie $(M, \mathcal{T})$ ist Umgebung jedes ihrer Punkte.

Beweis:

Sei $T \in \mathcal{T}$ und sei $x \in T$.

$\bigvee_{O \in \mathcal{T}} x \in O \wedge O \subseteq T$, nämlich T selbst $\Rightarrow T$ erfüllt

Definition 14 $\Rightarrow T$ ist Umgebung von x

Auch die Umkehrung¹⁾ des Satzes 6 gilt und ist ein wichtiges Mittel um zu entscheiden, ob eine Menge offen ist (siehe die Definitionen 1, 2 und 3)

Satz 7

Ist eine Menge Umgebung aller in ihr vorkommenden Punkte, so ist sie offen.

1) Formulieren Sie die Umkehrung von Satz 6 zunächst selbst bevor Sie sich Satz 7 zuwenden.

Beweis:

Sei $U \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in U \Rightarrow$

zu jedem $x \in U$ existiert eine offene Menge O_x
mit $x \in O_x \wedge O_x \subseteq U$ (siehe Definition 14)

$\Rightarrow \{x\} \subseteq O_x \subseteq U$ für alle $x \in U$

Wir vereinigen alle $\{x\}$ für alle $x \in U$ und
ebenso alle O_x , dann gilt:

$$\bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} O_x \subseteq U$$

(die Vereinigung aller O_x muß Teilmenge von U sein, da
alle O_x es waren)

Da $\bigcup_{x \in U} \{x\} = U$, erhalten wir $U \subseteq \bigcup_{x \in U} O_x \subseteq U$

$\Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} O_x$, d.h. U ist darstellbar als Vereinigung
offener Mengen

$\Rightarrow$ (nach Axiom (O2)) U ist eine offene Menge

Aus Aufgabe 41 und den Überlegungen zu Satz 6 und Satz 7
zusammen können wir folgern, daß zwar nicht jede Umge-
bung eines Punktes gleichzeitig Umgebung aller in ihr
enthaltenen Punkte ist, aber daß es stets eine
Teilmenge V der Umgebung U gibt, so daß U Umgebung jedes
Punktes dieser Teilmenge ist. Dies zeigt im Beispiel
die Menge $\{b, d, e\}$. $\{b, d, e\}$ ist nicht offen, daher nicht
Umgebung aller ihrer Punkte; wie man sieht, ist $\{b, d, e\}$
nicht Umgebung von b . $\{b, d, e\}$ ist jedoch sowohl Umge-
bung von d als auch von e . Es gibt also zu $\{b, d, e\}$
die Teilmenge $\{d, e\}$, so daß $\{b, d, e\}$ für jeden Punkt
dieser Teilmenge eine Umgebung ist. Diese Überlegungen
lassen den Inhalt des folgenden Satzes plausibel erschei-
nen.

Satz 8

In jedem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ gilt:

Zu jeder Umgebung U von x_0 gibt es eine Umgebung V von x_0 , so daß U Umgebung jedes Punktes von V ist.

Diese Existenzaussage ist sehr leicht zu beweisen. Sie zu "entdecken" war schwieriger. Das liegt wohl auch daran, daß wir keine unmittelbare praktische Bedeutung dieser Aussage sehen. Erst im Kapitel 2.4 "Häufungspunkt, abgeschlossene Hülle" werden wir die praktische Bedeutung von Satz 8 erkennen. Wir wollen den Beweis von Satz 8 gleich so führen, daß ersichtlich wird, wann V unechte Teilmenge von U ist und wann V eine echte Teilmenge von U sein muß.

Beweis (mit Fallunterscheidung):

1) Sei U offene Umgebung von x . Dann ist nach Satz 6 U Umgebung jedes seiner Punkte. Wir können $V = U$ wählen und die Aussage des Satzes ist erfüllt.

2) Sei U Umgebung von x und nicht-offen. Nach Definition 14 muß eine offene Teilmenge O von U existieren, die x enthält. $x \in O \wedge O \subset U$ (echte Teilmenge!)

Wir wollen zeigen, daß O eine solche Umgebung V von x ist, von der im Satz 8 gesprochen wird. Zunächst ist O Umgebung von x (da $x \in O$ und O offen). O ist offen, d.h. nach Satz 6 ist O Umgebung jedes seiner Punkte.

Kurz: $\bigwedge_{y \in O} O \in \mathcal{U}_y$. Nach der in Aufgabe 40 c (S.109)

bewiesenen Eigenschaft von Umgebungssystemen, gehört mit O auch jede Obermenge von O zu $\mathcal{U}_y$.

$O \subseteq U$, somit gilt: $\bigwedge_{y \in O} U \in \mathcal{U}_y$

D.h. U ist Umgebung jedes Punktes von O .

Aufgabe 42:

Man stelle in folgenden Topologien jeweils das Umgebungssystem $\mathcal{U}_b$ auf! Sei $M = \{a, b, c, d\}$.

a) $\mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$

b) $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, M\}$

c) $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$

Hinweis: Anstelle der aufzählenden Schreibweise von $\mathcal{U}_b$ kann auch die beschreibende gewählt werden. Versuchen Sie wenn möglich und vorteilhaft beide anzugeben.

Für Aufgabe 42 und Beispiel 2o (S. 110) können die Umgebungssysteme jeweils auch in beschreibender Form wiedergegeben werden. Für Beispiel 2o sind diese in der knappsten Darstellung aufgelistet:

$$\mathcal{U}_a = \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{a\} \subseteq T\}$$

$$\mathcal{U}_b = \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{b, c, d\} \subseteq T\}$$

$$\mathcal{U}_c = \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{b, c, d\} \subseteq T\}$$

$$\mathcal{U}_d = \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{d\} \subseteq T\}$$

$$\mathcal{U}_e = \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{c, e\} \subseteq T\}$$

$$M = \{a, b, c, d, e\} \quad [\{a, b, c, d\}, \{a, d\}, M]$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \{d\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d, e\},$$

Aufgabe 42*:

a) Machen Sie ebenfalls eine Aufstellung wie oben für den topologischen Raum aus Aufgabe 42 b

b) Was fällt Ihnen an beiden Auflistungen auf?

Verglichen mit den aufzählenden Mengenschreibweisen von $\mathcal{U}_b$ und $\mathcal{U}_e$ von S. 110 (Beispiel 2o) sind die obigen Schreibweisen für $\mathcal{U}_b$ und $\mathcal{U}_e$ kürzer und dadurch übersichtlicher. Es fällt auf, daß die jeweiligen Umgebungssysteme durch die Angabe einer Umgebung V des Punktes und die Anweisung "alle Obermengen von V nehmen" vollständig bestimmt sind.

Um diese Entdeckung nicht vorschnell zu verallgemeinern,

befassen wir uns auch mit Umgebungssystemen in $(\pi, \mathcal{T}_\pi)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathbb{R})$. Wir versuchen auch diese Umgebungssysteme in beschreibender Form wiederzugeben. (Versuchen Sie dies zunächst selbst!)

$$\sigma = (0|0), \quad \mathcal{U}_\sigma = \left\{ T \in \mathcal{P}(\pi) \mid \bigvee_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ s > 0}} K(\sigma, s) \subseteq T \right\}$$

$$\text{oder} \quad \mathcal{U}_\sigma = \left\{ T \in \mathcal{P}(\pi) \mid \bigvee_{\substack{\text{off. Quadrat } Q \\ \text{mit Mittelpunkt } \sigma}} Q \subseteq T \right\}$$

Sie können noch weitere Möglichkeiten für die beschreibende Form von $\mathcal{U}_\sigma$ finden. In jedem Fall zeigt sich:

die Anweisung "alle Obermengen ... nehmen" bleibt, aber sie kann nicht mehr nur auf eine Menge V bezogen werden.

Die Umgebung $K(\sigma; \frac{1}{5})$ gehört z.B. nicht zu den Obermengen von $K(\sigma; \frac{1}{2})$.

Das Umgebungssystem $\mathcal{U}_\sigma$ ist aber z.B. bestimmt

- 1) durch die Vorgabe der Menge aller offenen Kreisscheiben um σ , und
- 2) durch die Anweisung alle Obermengen dieser Kreisscheiben zu nehmen.

Die Menge $\mathcal{K}$ aller offenen Kreisscheiben um σ ist eine Teilmenge von $\mathcal{U}_\sigma$. Durch $\mathcal{K}$ wird das Umgebungssystem $\mathcal{U}_\sigma$ bestimmt. Man sagt, $\mathcal{K}$ ist eine **U m g e b u n g s b a s i s** von σ .

Definition 15

Eine Teilmenge $\mathcal{V}_p$ des Umgebungssystems $\mathcal{U}_p$ heißt Umgebungsbasis¹⁾ von p , wenn es zu jeder Umgebung U des Punktes p ein $V \in \mathcal{V}_p$ gibt, das ganz in U liegt.

- 1) Vergleichen Sie den Gebrauch des Begriffs Basis in der Bezeichnung "Umgebungsbasis" aufmerksam mit dem in der Bezeichnung "Basis einer Topologie". Von der Teilmenge $\mathcal{V}$ von $\mathcal{U}_p$ kommt man auf andere Weise zu $\mathcal{U}_p$ als von $\mathcal{B} \in \mathcal{T}$ zu $\mathcal{T}$.

Aufgabe 43:

Vervollständigen Sie folgende Kurzfassung der Definition:

$(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum,

$\mathcal{U}_p \subseteq \mathcal{U}_p$ ist Umgebungsbasis von p : $\Leftrightarrow \bigwedge_{U \in \mathcal{U}_p} \dots\dots\dots$

Für das Beispiel auf S. 115 ergeben sich nach Definition 15 folgende Umgebungsbasen

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_a &= \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{a\} \subseteq T\} & \mathcal{V}_a &= \{\{a\}\} \\ \mathcal{U}_b &= \{T \in \mathcal{P}(M) \mid \{b, c, d\} \subseteq T\} & \mathcal{V}_b &= \{\{b, c, d\}\} \end{aligned}$$

(Bestimmen Sie mündlich weitere Umgebungsbasen zu Beispiel 20, indem Sie zu S. 115 zurückblättern)

Laut Definition 15 sind zu obigem $\mathcal{U}_a$ auch $\{\{a\}, \{a, d\}\}$ bzw. $\{\{a\}, \{a, d\}, \{a, d, e\}\}$ Umgebungsbasen von a .

Finden Sie für den topologischen Raum des Beispiels 20 weitere Umgebungsbasen zu den Punkten b und d !

Bemerkung:

Die Beispiele zeigen (siehe auch S. 116 oben), daß es zu einem Umgebungssystem mehrere Umgebungsbasen geben kann. Die praktische Bedeutung von Umgebungsbasen wird erst beim Studium der Kapitel "Konvergenz von Folgen" und "Stetigkeit von Abbildungen" erkennbar. Dann wird auch einsichtig, warum man bestrebt ist, Umgebungsbasen mit möglichst wenigen Elementen anzugeben (siehe S. 115!)

Beispiele 21 bis 24:

21) $M = \{a, b, c, d, e\}; \mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}, M\}$

$$\mathcal{U}_d = \{U \in \mathcal{P}(M) \mid \{c, d\} \subseteq U\}$$

$\mathcal{U}_d = \{\{c, d\}\}$ ist eine Umgebungsbasis von d

22) In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist die Menge $\mathcal{K}^\circ$ aller offenen Kreisscheiben mit Zentrum z und Radius $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Umgebungsbasis von z .

Es gilt z.B. verglichen mit $\mathcal{K}$ von S. 116, daß $\mathcal{K}^\circ \subseteq \mathcal{K}$.
 $\mathcal{K}^\circ$ stellt eine Umgebungsbasis von $\mathcal{O}$ dar, die abzählbar

unendlich viele Elemente hat.¹⁾

23) In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ ist die Menge aller Intervalle $(-r; s)$ mit $r \in \mathbb{Q}^+$ und $s \in \mathbb{Q}^+$ eine Umgebungsbasis von 0.

An den Beispielen 21 - 23 sowie an den zurückliegenden kann ein einfaches Verfahren abgelesen werden zu einer Umgebungsbasis eines Punktes p zu kommen. Z.B. in $(\mathbb{I}, \tau_{\mathbb{I}})$ stellt die Menge aller offenen Kreisscheiben eine Basis der Topologie dar. Eine Umgebungsbasis von $\circ$ erhält man, wenn man die Basiselemente (offene Kreisscheiben) sammelt, die $\circ$ enthalten. Wir formulieren folgende Behauptung:

Satz 9

Ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie τ , so bilden die $B \in \mathcal{B}$, die den Punkt x enthalten, eine Umgebungsbasis von x .

Beweis:

Sei $\mathcal{U}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$. Zu zeigen: $\mathcal{U}_x$ ist eine Umgebungsbasis von x , d.h. zu zeigen:

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}_x} \bigvee_{B \in \mathcal{U}_x} B \subseteq U$$

Sei $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow \bigvee_{O \in \tau} x \in O \wedge O \subseteq U$

$O \in \tau$ ist die Vereinigungsmenge von gewissen $A \in \mathcal{B}$. Da $x \in O$ gelten soll, muß unter diesen $A \in \mathcal{B}$ eines sein (wir wollen es B nennen) für das $x \in B$. Somit $B \in \mathcal{U}_x$. Ferner ist natürlich $B \subseteq O$, da O Vereinigungsmenge. Und da $O \subseteq U$, gilt $B \subseteq U$.

Somit ist bewiesen:

$$\bigwedge_{U \in \mathcal{U}_x} \bigvee_{B \in \mathcal{U}_x} B \subseteq U$$

Beispiel 24:

In $(\mathbb{I}, \tau_G)$ (siehe S. 90 ff) ist zu $p \in G$ mit Hilfe von Satz 9 schnell eine Umgebungsbasis gefunden: die Menge aller offenen Streifen, die p und somit G enthalten ($\mathcal{U}_p = \{P \in \mathcal{P} \mid p \in P\}$). Geben Sie zu p noch eine andere Umgebungsbasis an!

1) Aus gewissen Gründen, deren Erläuterung über den Stoff unseres Topologiekurses hinausgehen würde, ist diese Abzählbarkeit bemerkenswert. (Definition der Abzählbarkeit siehe S. 182)

2.3 Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen

2.3.1 Der Begriff "Folge"

Gegenstand der Differentialrechnung ist u.a. die Untersuchung von unendlichen Zahlenfolgen. Deren Folgenglieder sind reelle Zahlen. Bei Zahlenfolgen kommt es auf die Reihenfolge der Glieder an, was sich durch die Indexschreibweise $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ ausdrückt. Betrachtet man diese Schreibweise genauer, so wird klar, daß Folgen Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ sind.

Definition 16

Unter einer (unendlichen) Folge versteht man eine Abbildung von $(\mathbb{N}^1)$ nach $\mathbb{R}$.

Manchmal benötigt man eine Verallgemeinerung von Definition 16. So ist es vorteilhaft von einer Folge auch zu sprechen, wenn als Definitionsmenge der Abbildung nicht mehr $\mathbb{N}$ sondern eine andere linear geordnete, abzählbar unendliche Menge verwendet wird. Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist z.B. eine solche linear geordnete, abzählbar unendliche Menge.

Aufgabe 44: 2)

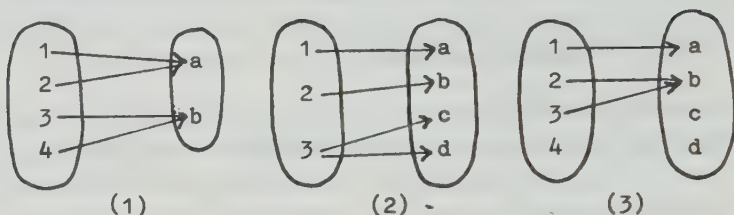
Machen Sie sich nochmals klar, was man allgemein unter einer Abbildung (= Funktion) einer Menge A in eine

1) bzw. einer unendlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$.

2) Diese Aufgabe soll unbedingt bearbeitet werden. Wissenslücken können durch das Studium von S. 176 ff geschlossen werden.

Menge B versteht.

a) Welche der Beispiele sind Abbildungen?



b) Geben Sie die verwendete Definition in Kurzform an!

c) Bei den Beispielen, die Abbildungen darstellen, sind Definitionsmenge und Wertemenge anzugeben.

Der Graph der Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Abbildungsvorschrift $n \mapsto \frac{1}{n}$ lautet:
 $\left\{ (1|1), (2|\frac{1}{2}), (3|\frac{1}{3}), (4|\frac{1}{4}), \dots \right\}$

Weil die Definitionsmenge aller Folgen $\mathbb{N}^1$ ist, weist der Graph jeder Folge abzählbar unendlich viele geordnete Paare auf also ist der Graph jeder Folge eine unendliche Menge.

Aufgabe 45:

Geben Sie die Graphen der folgenden Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ an (mindestens die ersten 5 Paare sollen aufgeschrieben werden).

a) $f(n) = \frac{n}{n+1}$

c) $h(n) = \frac{1}{n} (1 - (-1)^n)$

b) $g(n) = (-1)^n \cdot (n^2 + 1)$

d) $k(n) = 2 \cdot (-1)^n - \frac{1}{n^2}$

1) bzw. eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$

Die analytischen Ausdrücke in Aufgabe 45 stellen jeweils die Abbildungsvorschrift dar. Man sagt dafür auch "Bildungsgesetz der Folge" und wählt zur Vorgabe einer Folge auch die Schreibweise $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Will man sich kurz fassen, so schreibt man auch $\langle a_n \rangle$ für die Folge oder speziell $\langle \frac{n}{n+1} \rangle$. Auch die Schreibweise $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \dots$ ist für Folgen gebräuchlich. Das Bildungsgesetz der Folgenglieder bzw. die Abbildungsvorschrift der Folge ist dabei stets aus der Anreihung ersichtlich. Der letzteren Schreibweise entspricht die allgemeine Schreibweise $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

Bei der Betrachtung von Abbildungen (= Funktionen) interessiert auch jeweils die Menge aller Bilder der Abbildung (die Wertemenge). Auf Folgen angewandt, wird nach der Menge $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ gefragt, also nach der Wertemenge der Folge.

Beispiel 25:

- a) Die Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = (-1)^n$ hat die Wertemenge $\{-1; +1\}$.
- b) Die Folge $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k(n) = c$ (c konstant) hat die Wertemenge $\{c\}$.
- c) Die Folge $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(n) = 2n$ hat die Wertemenge $\{2; 4; 6; 8; \dots\}$,
also die Menge der geraden natürlichen Zahlen.

Wertemenge und Graph einer Folge sind auseinanderzuhalten. Man beachte auch, daß die Wertemenge einer Folge im Gegensatz zu ihrem Graphen keine unendliche Menge zu sein braucht. Die Folgen $\langle (-1)^n \rangle$ bzw. $\langle c \rangle$ des Beispiels 25 haben z.B. eine zweielementige bzw. einelementige Wertemenge.

Für die Konvergenzdefinition ist es nützlich, den Begriff "Endstück einer Folge" einzuführen. Darunter wollen wir bestimmte Teilmengen der Wertemenge einer Folge verstehen.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \boxed{\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \dots\dots\dots}$$

Endstück E_4

Definition 17

Sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge. Dann heißt für $m \in \mathbb{N}$ die Menge $E_m = \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq m \}$

Endstück der Folge.

Die Definition zeigt, daß es für eine gegebene Folge zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein Endstück E_m gibt. Die Endstücke einer Folge sind stets eine Teilmenge der Wertemenge der Folge.

Beispiel 26:

Für die Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ sind die Mengen

$$E_5 = \left\{ -\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \dots \right\}$$

$$E_{10} = \left\{ \frac{1}{10}; -\frac{1}{11}; \frac{1}{12}; -\frac{1}{13}; \frac{1}{14}; \dots \right\}$$

$$E_{100} = \left\{ \frac{1}{100}; -\frac{1}{101}; \frac{1}{102}; -\frac{1}{103}; \dots \right\} \quad \text{Endstücke..}$$

Beispiel 27:

Für die Folge $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k(n) = 2$ sind alle Endstücke gleich: $E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_{10} = \dots = \{2\}$.

Das Beispiel zeigt, daß es unter den Endstücken einer Folge auch gleiche geben kann und daß sogar alle Endstücke einer Folge gleich sein können.

Aufgabe 46:

Geben Sie zu den Folgen aus Aufg. 45 die Endstücke E_3, E_8 an!

Aufgabe 47:

Lösen Sie Aufgabe 46 nochmals, benützen Sie nun aber zur Vorgabe der Mengen E_3 und E_8 die beschreibende Form der Mengenvorgabe.

Aufgabe 48:

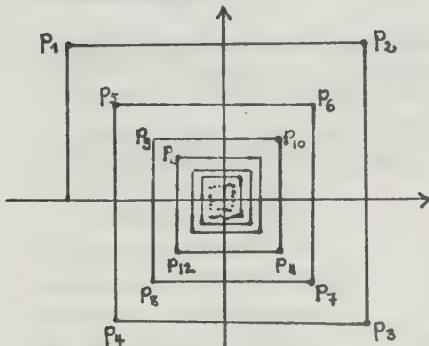
Können Sie eine allgemeine Aussage über den Durchschnitt zweier Endstücke einer Folge machen?

In welcher Beziehung stehen die Endstücke E_{m_1} und E_{m_2} einer Folge, wenn $m_1 \leq m_2$ ist?

Können Endstücke von Folgen endliche Mengen sein?

Bisher war stets von Zahlenfolgen die Rede, also Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Die Zielmenge $\mathbb{R}$ kann ohne weiteres durch eine andere Menge, etwa $\mathbb{I}$ oder $\mathcal{G}$ ersetzt werden. Wir sagen dann Punktfolgen zu diesen Abbildungen oder wieder kurz Folgen.

Beispiel 28:



Man denke sich linksstehend unendlich viele Punkte dargestellt, die mit $1, 2, 3, 4, \dots$ durchnummeriert seien (Indizes). Dann definiert die Zuordnungsvorschrift $n \mapsto p_n$ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{I}$, also nach obiger Festsetzung eine Folge $\langle p_n \rangle$

Der Graph der Folge ist $(1|p_1), (2|p_2), (3|p_3), \dots$. Für Punktfolgen wird - wie für Zahlenfolgen üblich - oftmals auch die Schreibweise $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ gewählt.

Beispiel 29:

Als Zielmenge einer Abbildung mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ kann man auch beliebige Mengen wählen, z.B. die dreielementige Menge $M = \{a, b, c\}$. Der Graph einer möglichen derartigen Abbildung ist etwa $\{(1|a), (2|b), (3|a), (4|b), (5|a), \dots\}$.

In Kurzform kann diese Abbildung so dargestellt werden: $a, b, a, b, a, b, \dots$. Wir wollen auch dies als Folge bezeichnen.

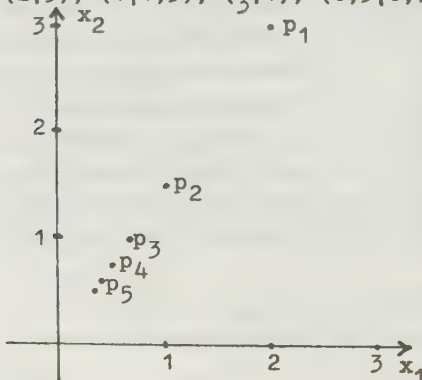
Definition 18

Unter einer Folge in einer Menge M versteht man eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M .

Beispiel 30:

Die Folgenglieder einer Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ sind Punkte in $\mathbb{I}$. Zu deren Angabe sind 2 Koordinaten nötig. Durch $n \mapsto (\frac{2}{n} | \frac{3}{n})$ sei eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{I}$ gegeben, also eine Folge in $\mathbb{I}$.

Die ersten fünf Punkte der Folge haben die Koordinaten: $(2|3), (1|1,5), (\frac{2}{3}|1), (0,5|0,75), (0,4|0,6)$



Die Folgenpunkte können in einem Koordinatensystem auch zeichnerisch dargestellt werden. Siehe nebenstehende Darstellung der Bildmenge der Folge

$$\langle p_n \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{n} \mid \frac{3}{n} \right) \right\rangle$$

Auch der Begriff "Endstück einer Folge" kann auf allgemeine Folgen ausgedehnt werden.

Definition 19

Für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ versteht man unter dem Endstück E_m der Folge $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ die Menge der Bilder $f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$

$$E_m := \{f(n) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq m\}$$

Beispiel 31a:

Für die Punktfolge aus Beispiel 30 ist etwa

$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{ \left(\frac{2}{n} \mid \frac{3}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4 \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{2}{4} \mid \frac{3}{4} \right), \left(\frac{2}{5} \mid \frac{3}{5} \right), \left(\frac{2}{6} \mid \frac{3}{6} \right), \dots \right\} \end{aligned}$$

Beispiel 31b:

Für die Folge in $M = \{a, b, c\}$ des Beispiels 29 haben die Endstücke die Gestalt:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = \dots = \{a, b\}$$

Aufgabe 49:

- a) Berechnen Sie jeweils die Koordinaten der ersten sechs Punkte der durch ihre Abbildungsvorschriften gegebenen vier Punktfolgen in $\mathbb{K}$

$$n \mapsto \left(\frac{2}{n} \mid \frac{2}{n^2} \right) \qquad n \mapsto (3 \cdot (-1)^n \mid \frac{n}{n+1})$$

$$n \mapsto (n+1 \mid 2 - \frac{1}{n}) \qquad n \mapsto (2 \mid 7)$$

- b) Zeichnen Sie für jede Folge die ersten sechs Punkte in ein Koordinatensystem ein.

c) Bestimmen Sie jeweils das Endstück E_3 für alle Folgen.

Aufgabe 50:

Beantworten Sie die Fragen a), b), c) der Aufgabe 49 für unten beschriebene Folge in $\mathbb{I}$. Sei $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ mit

$$t(n) = \begin{cases} (3 + \frac{1}{n} \mid 2) & \text{für } n \text{ gerade, } n \in \mathbb{N} \\ (-\frac{1}{n} \mid 2 + \frac{1}{n}) & \text{für } n \text{ ungerade, } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Aufgabe 51:

Untenstehende Zahlenfolgen wurden sortiert. Erkennen Sie die gemeinsame Eigenschaft aller in einer Spalte vorkommenden Folgen? Frage a: Welche Überschrift könnte über die Spalten gesetzt werden?

?	?
$\langle \frac{2}{3} \rangle$	$\langle n^3 \rangle$
$\langle (-1)^n \cdot \frac{3}{n} \rangle$	$\langle n+1 \rangle$
$\langle \frac{n}{n+1} \rangle$	$\langle (-1)^n \cdot (2 + \frac{1}{n}) \rangle$
$\langle \frac{4}{n^2} \rangle$	$\langle 1 + (-1)^n \rangle$
$\langle \frac{n+1}{n^2} \rangle$	

Frage b: Können auch Punktfolgen in $\mathbb{N}$ nach diesem Gesichtspunkt sortiert werden? In welche Spalte müßten dann Ihrer Meinung nach die unten stehenden vier Punktfolgen aus $\mathbb{N}$ einsortiert werden?

$$\left\langle \left(\frac{1}{n} \mid \frac{3}{n} \right) \right\rangle$$

$$\left\langle \left(1+n \mid \frac{2}{n} \right) \right\rangle$$

$$\left\langle (7 \mid -3) \right\rangle$$

$$\left\langle \left((-1)^n \cdot n \mid 2 \right) \right\rangle$$

2.3.2 Konvergenzdefinition

Die vorangegangenen Fragen sollten Sie an bereits Bekanntes erinnern (Frage a, Seite 126) - nämlich die Konvergenzdefinition in $\mathbb{R}$ - und zugleich das Bedürfnis wecken, eine Konvergenzdefinition auch in anderen Räumen ($\mathbb{K}$ oder $\mathfrak{G}$ usw.) aufzustellen (Frage b, Seite 127). Zunächst ein Blick auf die Konvergenzdefinition für Folgen in $\mathbb{R}$, die Sie bisher verwendet haben:

$\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen $a : \Leftrightarrow$ zu jedem $\varepsilon > 0$
gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für
alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

Mit Hilfe der Begriffe "Kugelumgebung von a " und "Endstück der Folge $\langle a_n \rangle$ " sieht diese Definition dann so aus:

Definition 20

Eine Zahlenfolge heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder Kugelumgebung¹⁾ von a ein Endstück der Folge gibt, das ganz in der Kugelumgebung liegt.

Auf S. 116 ff wurde erarbeitet, daß die Menge $\mathcal{K}_a$ aller Kugelumgebungen von a eine Umgebungsbasis von a in $(\mathbb{R}, \mathcal{V}_{\mathbb{R}})$ darstellt.

1) manchmal wird statt "Kugelumgebung" auch " ε -Umgebung" gebraucht. $K(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(a, x) < \varepsilon\}$

Definition 20 in Kurzform

Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

f heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R} : \iff$

$\bigwedge U \in \mathcal{K}_a$

$\bigvee$ Endstück
 E_m der Folge

$E_m \subseteq U$

Aufgabe 52:

Berechnen Sie für die angegebenen Folgen in $\mathbb{R}$ die ersten 5 Folgenglieder und beantworten Sie die Frage nach der Konvergenz. Inwiefern kommt Definition 20 zur Anwendung?

a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = \frac{8+n}{3n-5}$

b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(n) = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$

c) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(n) = \frac{5n+1}{n^2-3}$

Die Definition 20 läßt sich leicht auf allgemeine Räume ausweiten. Um nicht auf metrische Räume eingeeengt zu sein (nur in metrischen Räumen gibt es Kugel-Umgebungen) ersetzen wir in der Definition das Wort "Kugel-Umgebung" durch das Wort "Umgebung".¹⁾

Definition 21

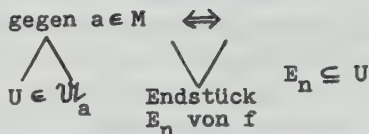
Eine Folge in einem topologischen Raum $(M, \mathcal{V})$ heißt konvergent gegen $a \in M$, wenn es zu jeder Umgebung U von a ein Endstück E_n der Folge gibt, das ganz in U liegt.

1) Dies bedeutet, daß in Definition 20 "Umgebungsbasis" durch "Umgebungssystem" ersetzt wird. Diese Ersetzung ändert nichts an der Klasse aller konvergenten Folgen, was mit Hilfe von Definition 15 (S.116) bewiesen werden kann. Siehe S. 132!

Definition 21 in Kurzform

Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow M$

f heißt konvergent gegen $a \in M$



Bezeichnung

Konvergiert eine Folge gegen $a \in M$, so heißt a Grenzwert der Folge.

Definition 22

Eine Folge heißt konvergent im topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$, wenn es ein $a \in M$ gibt, so daß a Grenzwert der Folge ist.

Gibt es ein solches $a \in M$ nicht, so heißt die Folge nicht-konvergent oder auch divergent. (Definition 23)

Entsprechend der Verneinung von Existenzaussagen gilt:

Satz 10

Eine Folge ist genau dann divergent, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Umgebung von x gibt, in der kein Endstück der Folge liegt.

(Kurzform und Begründung als Übung!)

Aufgabe 53:¹⁾

Will man nachprüfen, ob eine gegebene Folge nach Definition 21 konvergent gegen einen gegebenen Punkt a ist, so erfordert dies mehrere Schritte, deren Abfolge in einem groben Ablaufdiagramm angegeben werden kann. Für einen gegebenen endlichen topologischen Raum und eine gegebene Folge in ihm soll das Ablaufdiagramm der Konvergenzuntersuchung aufgestellt werden.

Aufgabe 54:

Gegeben sei der topologische Raum $(M, \mathcal{T})$ mit $M = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, M\}$
Konvergiert die Folge $a, b, c, a, b, c, \dots$ gegen b ?
Konvergiert die Folge $b, c, b, b, c, b, b, b, c, \dots$ gegen b ?
Konvergiert die Folge $d, d, c, a, b, d, c, b, d, c, \dots$ gegen b ?

(Hinweis: Die angegebenen Folgen sollen nach dem deutlich erkennbaren Bildungsgesetz fortzusetzen sein)

Aufgabe 55:

In $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ seien die untenstehenden Folgen gegeben. M sei mit der diskreten Topologie ausgestattet. Sind die angegebenen Folgen in diesem topologischen Raum konvergent?

- a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$
- b) $2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 1, \dots$
- c) $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$
- d) $3, 4, 3, 4, 4, 3, 4, 4, 4, 3, \dots$

(Hinweis: Untersuchen Sie zunächst ob die angegebenen Folgen gegen 1 konvergieren)

1) Kann entfallen, wenn das Anfertigen von Ablaufdiagrammen unbekannt ist.

Bei der Bearbeitung von Aufgabe 55 fällt auf: Um zu zeigen, daß a Grenzwert einer gegebenen Folge ist, genügt es, die zu einer Umgebungsbasis von a gehörenden Umgebungen von a daraufhin zu untersuchen, ob ein Endstück der Folge in ihnen liegt.

Satz 11

Gegeben sei eine Folge $\langle a_n \rangle$. Gilt für alle $V \in \mathcal{V}_a$ (Umgebungsbasis von a), daß es ein Endstück E_m der Folge gibt mit $E_m \subseteq V$, so ist die Folge konvergent gegen a .

Beweis:

$$\begin{array}{l} \text{Sei } U \in \mathcal{U}_a \Rightarrow \\ \text{nach Voraussetzung} \end{array} \left. \begin{array}{l} \bigvee_{V \in \mathcal{V}_a} V \subseteq U \\ \bigvee_{E_m} E_m \subseteq V \end{array} \right\} \Rightarrow \bigvee_{E_m} E_m \subseteq U$$

Da die Umkehrung des Satzes 9 trivialerweise gilt (da $\mathcal{V}_a$ eine Teilmenge von $\mathcal{U}_a$ ist), kann Definition 21 ersetzt werden durch:¹⁾

Folge $\langle a_n \rangle$ konvergent gegen $a \iff$
für alle $V \in \mathcal{V}_a$ (Umgebungsbasis von a) gibt es ein
Endstück E_m der Folge mit $E_m \subseteq V$

Besonders für Topologien mit unendlich vielen offenen Mengen ist dieses Konvergenzkriterium handlicher. Nun wird auch die Bemerkung auf S. 117 über Umgebungsbasen einsichtig.

1) Für $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und die spezielle Umgebungsbasis $\mathcal{K}_a$ von a sind wir damit wieder bei Definition 20 angelangt.

Aufgabe 56:¹⁾

- a) Wie ändert sich das Ablaufdiagramm von Aufgabe 53 für den Konvergenznachweis, wenn Definition 21 durch das obige Kriterium ersetzt wird?
- b) Für $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ soll formal versucht werden, das Ablaufdiagramm auf die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n}{n+1} \rangle$ anzuwenden, indem untersucht wird, ob $\langle a_n \rangle$ gegen 1 konvergiert.²⁾

Aufgabe 57:

- a) Im topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ mit $M = \{a, b, c\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$ sei die Folge $b, a, c, b, a, c, b, a, c, \dots$ gegeben. Konvergiert die Folge gegen a (gegen b , gegen c)?
(Hinweis: Untersuchen Sie die drei Fragen einzeln!)
- b) Leiten Sie von dem Ergebnis a) eine allgemeine Aussage über Konvergenz beliebiger Folgen in indiskreten Topologien ab!

Aufgabe 58:

Betrachten Sie nochmals das Ergebnis von Aufgabe 55 und formulieren Sie eine allgemeine Aussage über Konvergenz von Folgen in diskreten Topologien.

-
- 1) Kann entfallen, wenn das Anfertigen von Ablaufdiagrammen unbekannt ist.
- 2) Da die Menge der ε -Umgebungen eines Punktes in $\mathbb{R}$ eine unendliche Menge ist, hat ein Ablaufdiagramm hier nur symbolische Bedeutung. Alle ε -Umgebungen können nicht wirklich daraufhin untersucht werden, ob es zu ihnen ein Endstück der Folge gibt, das ganz in ihnen liegt. Frage: Warum ist der Konvergenznachweis trotzdem möglich? Machen Sie sich die Rolle von Variablen in diesem Zusammenhang klar!

Bemerkung:

Folgen können mehr als einen Grenzwert haben. Das Konvergenzverhalten einer Folge in M hängt von der Topologie ab mit der M ausgestattet ist.

Aufgabe 59:

Finden Sie zur zweiten Bemerkung ein demonstratives Beispiel.

Frage:

Kennen Sie Folgen in $\mathbb{R}$, die mehr als einen Grenzwert haben? ($\mathbb{R}$ sei mit der natürlichen Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ ausgestattet). Betrachten Sie dazu auch die Folgen in $\mathbb{R}$ aus Aufgaben 52 und 56.

Der obigen Bemerkung entsprechend vermuten wir, daß die Tatsache "alle Folgen haben höchstens einen Grenzwert" wohl von der Art des topologischen Raumes abhängt, in dem die Folge betrachtet wird. Unser Ziel ist eine allgemeine Aussage folgender Art machen zu können:

Hat ein topologischer Raum die und die Eigenschaft, dann haben Folgen in ihm stets höchstens einen Grenzwert.

Aufgabe 60:

Machen Sie sich die Bedeutung des Wortes höchstens in obiger Aussage klar, indem Sie die Aussage anders ausgedrückt nochmals wiedergeben! Welchen Sinn erhielte die Aussage, wenn man statt höchstens das Wort mindestens setzt?

Auf dem Weg zu obigem Ziel betrachten wir Beispiel 32.

Gegeben sei eine Folge in $\mathbb{K}$: $\left\langle \left(1 + \frac{1}{n} \mid 5 + \frac{3}{n} \right) \right\rangle$

$\mathbb{K}$ sei mit der üblichen Topologie $\tau_{\mathbb{K}}$ ausgestattet. Dann konvergiert die Folge gegen den Punkt $(1 \mid 5)$.

(Beweis als Aufgabe 61!)

Die gleiche Folge $\langle p_n \rangle$ werde nun im topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ betrachtet. $\mathcal{O}$ sei eine sogenannte "Streifentopologie", die durch die Gerade $x_2 = 3x_1 + 2$ bestimmt ist.¹⁾

Aufgabe 62:

- a) Zeichnen Sie die ersten fünf Punkte der Folge $\langle (1 + \frac{1}{n} \mid 5 + \frac{2}{n}) \rangle$ in ein Koordinatensystem ein, außerdem die Gerade $x_2 = 3x_1 + 2$.
- b) Geben Sie eine Beschreibung der Umgebungsbasis des Punktes $(1 \mid 5)$, sowie einer des Punktes $(2 \mid 8)$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$.
- c) Konvergiert die obige Folge $\langle p_n \rangle$ gegen den Punkt $(1 \mid 5)$? Konvergiert sie gegen den Punkt $(2 \mid 8)$?
- d) Machen Sie eine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der Folge $\langle p_n \rangle$ in $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$.

Aufgaben 61 und 62 zeigen das unterschiedliche Konvergenzverhalten derselben Folge in zweierlei Topologien. Die Topologie $\mathcal{O}$ war in einem früheren Kapitel (siehe S.90 ff!) mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ verglichen worden. Dabei hatten wir festgestellt, daß $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ein Hausdorff-Raum ist und $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ nicht. Wir stellen nun die Vermutung an, daß die Eigenschaft "hausdorffsch zu sein" von Bedeutung für das Konvergenzverhalten von Folgen in einem topologischen Raum ist. Wir wollen diese Vermutung dadurch erhärten, daß wir weitere Beispiele von Folgen in hausdorffschen und in nicht-hausdorffschen Räumen sammeln.

1) Definition der Streifentopologien siehe Seite 90 ff

Folgen in hausdorffschen Räumen

1. In $(M, \mathcal{T})$ mit $M = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)^{1)}$:

Die Folgen

$a, b, c, c, a, b, b, b, b, \dots$

$c, b, c, b, a, a, a, a, a, \dots$

$a, c, b, c, a, c, c, c, c, \dots$

haben jeweils einen Grenzwert (nämlich b bzw. a bzw. c).

Die Folgen

$a, c, a, c, a, c, a, c, \dots$

$b, c, a, c, a, b, c, a, \dots$

$a, a, a, a, a, b, a, a, b, a, \dots$

konvergieren nicht. Sie haben keinen Grenzwert.

In $(M, \mathcal{P}(M))$ konvergieren nur solche Folgen $\langle a_n \rangle$, für die es ein N gibt, so daß für alle $n > N$ a_n konstant ist. Diese Folgen konvergieren dann gegen genau einen Punkt.

2. In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$:

Die Folgen

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

$2, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{25}, \dots$

$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

haben jeweils einen Grenzwert.

1) $\mathcal{P}(M)$ ist die einzige hausdorffsche Topologie auf einer endlichen Menge M (siehe Aufgabe 32, S. 94)

Folgen in nicht-hausdorffschen Räumen

1. In $(M, \mathcal{T})$ mit $M = \{a, b, c\}$ und
 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, M\}$

konvergiert die Folge

$a, b, c, c, a, b, b, b, \dots$

gegen b

$c, b, c, b, a, a, a, a, \dots$

gegen a und c

$a, c, b, c, a, c, c, c, \dots$

gegen a und c

konvergiert die Folge

$a, c, a, c, a, c, a, c, \dots$

gegen a und c

konvergieren die Folgen

$b, c, a, c, a, b, c, a, \dots$

$a, a, a, a, b, a, a, b, a, \dots$

nicht.

In $(M, \mathcal{T})$ gibt es auch Folgen, die zwei
 Grenzwerte haben.

2. In $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ die Topologie sei,
 die die Menge aller offenen Intervalle, die
 den Punkt 0 enthalten, als Basis hat.¹⁾

Die Folge

$2, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{25}, \dots$

konvergiert gegen jeden Punkt $x \geq 1$

Die Folgen

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots$

konvergieren gegen jeden Punkt $x \geq 0$

1) $\mathcal{T}$ ist eine nicht-hausdorffsche Topologie,
 siehe dazu die Bemerkung auf S. 94

Folgen in hausdorffschen Räumen

In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$:

Die Folgen

2, 4, 8, 16, 32, ...

$1, -\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{7}{6}, \dots$

2, 0, 6, 0, 10, 0, 14, 0, 18, ...

konvergieren nicht. Sie haben keinen Grenzwert.

3. In $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$:

Die Folgen

(I) $(4|-2), (2|-2), (1|-2), (\frac{1}{2}|-2),$

$(\frac{1}{4}|-2), (\frac{1}{8}|-2), \dots$

(II) $(2|1), (\frac{3}{2}|\frac{1}{4}), (\frac{4}{3}|\frac{1}{9}), (\frac{5}{4}|\frac{1}{16}),$

$(\frac{6}{5}|\frac{1}{25}), \dots$

(III) $(2|0), (-3|1), (1|2), (-\frac{1}{2}|5),$

$(-\frac{1}{2}|5), (-\frac{1}{2}|5), (-\frac{1}{2}|5), \dots$

haben jeweils einen Grenzwert.

Die Folgen

(IV) $(0|-2), (3|-2), (6|-2), (9|-2),$

$(12|-2), \dots$

(V) $(2|1), (-2|1), (-2|-1), (2|-1),$

$(2|1), (-2|1), (-2|-1), (2|-1), \dots$

(VI) $(1|1), (\frac{1}{2}|2), (\frac{1}{3}|3), (\frac{1}{4}|4), \dots$

konvergieren nicht. Sie haben keinen Grenzwert.

Folgen in nicht-hausdorffschen Räumen

In $(\mathbb{R}, \gamma)$:

Die Folgen

2, 4, 8, 16, 32, ...

1, $-\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, ...

2, 0, 6, 0, 10, 0, 14, 0, 18, ...

konvergieren nicht.

In $(\mathbb{R}, \gamma)$ gibt es Folgen, die gegen mehr als einen Punkt konvergieren.

3. In $(\Pi, \tilde{\mathcal{O}}_G)$:

$\tilde{\mathcal{O}}_G$ sei die Streifentopologie, die durch die Parallele zur x_1 -Achse mit der Gleichung $x_2 = -2$ definiert wird.

Die Folge

- (I) konvergiert gegen alle Punkte der Geraden $x_2 = -2$
- (II) konvergiert gegen alle Punkte der Geraden $x_2 = 0$
- (III) konvergiert gegen alle Punkte der Geraden $x_2 = 5$
- (IV) konvergiert gegen alle Punkte der Geraden $x_2 = -2$
- (V) konvergiert nicht
- (VI) konvergiert nicht

Die Beispiele legen folgende Aussage nahe:

Satz 12

Ist $(M, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum, dann hat jede Folge in ihm höchstens einen Grenzwert.¹⁾

Beweis:

Annahme: Es gibt in $(M, \mathcal{T})$ eine Folge f , die gegen zwei verschiedene Grenzwerte a und b konvergiert. Da $(M, \mathcal{T})$ als Hausdorff-Raum vorausgesetzt ist, gibt es $U \in \mathcal{U}_a$ und gibt es $V \in \mathcal{U}_b$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Da f gegen a konvergiert, folgt: zu $U \in \mathcal{U}_a$ gibt es ein Endstück E_m der Folge mit $E_m \subseteq U$

Da f gegen b konvergiert, folgt: zu $V \in \mathcal{U}_b$ gibt es ein Endstück E_k der Folge mit $E_k \subseteq V$

In Aufgabe 48 (S. 123) wurde gezeigt: $E_m \cap E_k = E_{\max(m,k)} (\neq \emptyset)$

Somit gilt für $E_{\max(m,k)}$: $E_{\max(m,k)} \subseteq E_m$

$$E_{\max(m,k)} \subseteq E_k$$

Zusammen mit Obigem über E_m und E_k folgt:

$$E_{\max(m,k)} \subseteq U \quad \text{und} \quad E_{\max(m,k)} \subseteq V$$

$$\Rightarrow E_{\max(m,k)} \subseteq U \cap V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$$

Dies stellt einen Widerspruch zu obiger Annahme dar.

1) Die Umkehrung der Aussage würde lauten: Hat in einem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ jede Folge höchstens einen Grenzwert, dann ist $(M, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum. Diese Aussage gilt nicht allgemein, was z.B. das Beispiel 33 auf S. 141 zeigt. Lesen Sie zu dieser Problematik weiteres in folgenden auf S. 222 aufgeführten Büchern: 4), 5), 7) und Behnke, u.a.: Grundzüge der Mathematik III, Analysis, Kap. 1: Konvergenz, Göttingen 1962.

Aufgabe 63:

Finden Sie im topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ der Aufgabe 62 weitere Folgen, die mehr als einen Grenzwert besitzen.¹⁾

Aufgabe 64:

Gibt es im Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ der Aufgabe 62 Folgen mit genau einem Grenzwert? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Daß das Konvergenzverhalten einer Folge davon abhängt, mit welcher Topologie der Raum ausgestattet ist, wird an folgendem Beispiel nochmals deutlich, welches wir uns für später (S. 217, Beispiel 70) bereitstellen.²⁾

Beispiel 33:

$\mathbb{R}$ sei mit der Topologie $\mathcal{T}$ ausgestattet, in der außer $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ selbst alle Komplementärmengen von abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ offene Mengen sind. Nach dem Muster der Aufgabe 18 (S. 77) kann leicht gezeigt werden, daß $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum ist.³⁾

Wir behaupten, daß in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nur Folgen der Form $a_1, a_2, \dots, a_m, b, b, b, \dots$ (*) konvergieren. (Diese konvergieren nach b , was leicht zu beweisen ist).

-
- 1) Man kann sich wenn nötig auf die Beschreibung der Lage der Punkte beschränken.
 - 2) Es kann auch zurückgestellt werden, bis das Umgehen mit abzählbaren Mengen geläufiger ist (Definition der Abzählbarkeit S. 182)
 - 3) $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist ein nicht-hausdorffscher Raum, da es in $\mathbb{R}$ keine 2 disjunkten Teilmengen gibt, die beide das Komplement von abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

Folgen, die nicht die angegebene Form (*) haben, weisen keine einelementigen Endstücke auf. Von einer beliebigen solchen Folge f wollen wir ausgehen und beweisen, daß sie nach Satz 10 (S. 130) divergent ist.

W_f sei die Wertemenge der Folge f und x ein beliebiger Punkt aus $\mathbb{R}$. Wir wollen zeigen: die Folge f konvergiert nicht gegen x .

Dazu wählen wir die Menge $U = (\mathbb{R} \setminus W_f) \cup \{x\}$. Wie leicht zu sehen ist, ist U offene Umgebung von x (bei der Überlegung benützt man, daß $U = \mathbb{R} \setminus (W_f \setminus \{x\})$). Zur offenen Umgebung U von x gibt es aber kein Endstück der Folge, das ganz in U liegt; denn alle Endstücke sind Teilmengen von W_f und laut Annahme über die Form der Folge f ist auch kein Endstück von f gleich $\{x\}$.

Somit ist die Folge f nicht konvergent gegen x . Alle Folgen, die nicht obige Form (*) haben, sind also divergent.

2.3.3 Konvergenzkriterien

Die Folge

$(1|1), (\frac{1}{2}|2), (\frac{1}{3}|3), (\frac{1}{4}|4), \dots$

konvergiert in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ nicht, so stellten wir bei der oben vorgenommenen Sammlung von Beispielen fest.

Frage: Wie lautet der Beweis für diese Feststellung? Versuchen Sie für den Beweis ein ähnliches Ablaufdiagramm¹⁾ anzufertigen wie in Aufgabe 53. (S. 131)

Um die Nicht-Konvergenz einer Folge in einem Raum (M, γ) zu zeigen, müßte man von jedem Punkt x aus M zeigen, daß er nicht Grenzwert der Folge ist. Dies haben wir bei obiger Folge in $\mathbb{R}$ nicht getan, sondern sehr rasch entschieden, daß diese Folge nicht konvergent ist. Gibt es eine Begründung für diese Entscheidung?

Wir nennen als Begründung z.B., daß die x_2 -Werte der Folgenpunkte unbegrenzt wachsen. Ob diese Begründung berechtigt ist, wollen wir später sehen. Jedenfalls verwendet diese Begründung weder unmittelbar die Konvergenzdefinition 21 noch Satz 11 (S. 132). Wir fragen deshalb: "Gibt es noch weitere Konvergenzkriterien"?

Diese Frage stellen wir zunächst für Folgen in $\mathbb{R}$. (Wir ziehen zur Beantwortung dieser Frage auch zusätzlich das früher benutzte Analysisbuch heran).

Für Folgen in $\mathbb{R}$ gibt es Konvergenzkriterien, bei denen es nicht nötig ist, von einem vermuteten Grenzwert auszugehen.²⁾

1) Das Ablaufdiagramm kann entfallen, wenn Ablaufdiagramme nicht bekannt sind. Es wird dann durch eine kurze Beweisskizze ersetzt.

2) $\mathbb{R}$ ist hierbei jeweils mit der üblichen Topologie $\gamma_{\mathbb{R}}$ ausgestattet.

- (a) Jede monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.
- (b) Cauchy'sches Konvergenzkriterium
Eine Folge $\langle a_n \rangle$ aus $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem positiven ε ein m gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

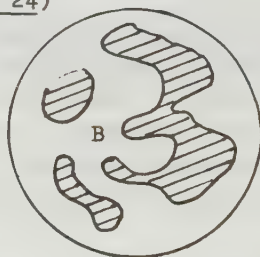
$$|a_m - a_{m+k}| < \varepsilon$$

Auch eine notwendige Bedingung für Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ ist zu nennen:

- (c) Jede in $\mathbb{R}$ konvergente Folge ist beschränkt.

Den in $\mathbb{R}$ definierten Begriff der "beschränkten Menge" kann man auf beliebige metrische Räume übertragen. Eine beschränkte Menge B in einem metrischen Raum (M, d) ist eine Menge, zu der es eine Kugel gibt, die B als Teilmenge enthält. (Definition 24)

Beispiel einer
beschränkten
Menge in $(\mathbb{R}, d)$



Ausgehend von obiger Definition 24 beschränkter Mengen kann man zeigen, daß in jedem metrischen Raum gilt:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.
(Beweis als Aufgabe 65)

In Räumen, die keine Metrik aufweisen, ist (c) unbrauchbar.

Der Begriff "monoton steigende Folge" oder "monoton fallende Folge" ist nur in Räumen definierbar, in denen eine Ordnungsrelation erklärt ist. Das muß in beliebigen metrischen Räumen nicht der Fall sein. Somit läßt sich (a) nicht als Konvergenzkriterium auf Folgen in beliebigen metrischen Räumen anwenden und auch nicht in beliebigen topologischen Räumen.

In metrischen Räumen läßt sich zeigen, daß alle konvergenten Folgen auch Cauchy-Folgen sind. (Der Beweis kann bei Belkner: "Metrische Räume" nachgelesen werden).

Definition 25

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ in einem metrischen Raum (M, d) heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(a_m, a_{m+k}) < \varepsilon$$

Es gibt jedoch metrische Räume, in denen nicht jede Cauchy-Folge eine konvergente Folge ist.

Beispiele: (Beweis als Übung)

- a) M sei das Intervall $(0;1)$ mit der in $\mathbb{R}$ üblichen Metrik d . Dann ist die Folge $\langle \frac{1}{n+1} \rangle$ eine Cauchy-Folge in (M, d) aber sie ist nicht konvergent in (M, d) .
- b) $E = \{(x_1 | x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \wedge x_2 > 0\}$ sei mit der in $\mathbb{R}^2$ üblichen Metrik d ausgestattet. Dann ist im metrischen Raum (E, d) die Folge $\langle (\frac{1}{n} | \frac{1}{n}) \rangle$ eine Cauchy-Folge. Dieselbe Folge ist aber nicht konvergent in (E, d) .

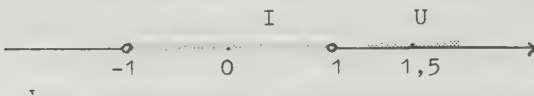
Definition 26

Metrische Räume, in denen jede Cauchy-Folge konvergent ist, heißen vollständig.

2.4 Häufungspunkt

2.4.1 Häufungspunkt einer Menge

Wir vergleichen die Lage der Punkte 1,5; 1,2; -1,7; 1; -1 in Bezug auf die Punktmenge $I = (-1; 1)$ aus $\mathbb{R}$. Die Punkte -1 und 1 nehmen hinsichtlich der Nähe zur Menge I eine Sonderstellung ein. Die Punkte 1,5; 1,2; -1,7 liegen nicht so nah bei I wie -1 und 1. Zu den Punkten 1,5; 1,2; -1,7 gibt es jeweils (mindestens) eine Umgebung in der kein Punkt aus I liegt (siehe Zeichnung).



Die Punkte 1 und -1 liegen dagegen so nah an der Menge I, daß es keine solche Umgebung zu ihnen gibt. Es gilt also: Jede Umgebung von 1 enthält Punkte aus I. Und ebenso: Jede Umgebung von -1 enthält Punkte aus I.

Auch zu anderen Punktmengen B gibt es solche "sehr nah bei der Menge B gelegenen" Punkte.

Als Beispiel betrachten wir die Menge $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$. Für die Menge B ist der Punkt 0 ein solcher besonderer Punkt. Jede Umgebung von 0 enthält mindestens einen Punkt aus B.

Solche "sehr nahen Punkte bezüglich einer Menge B" nennt man Häufungspunkte der Menge B.

Definition 27

In einem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ heißt ein Punkt x Häufungspunkt einer Menge B ($B \subseteq M$), wenn jede Umgebung von x mindestens einen Punkt von B enthält, der ungleich x ist.

Definition 27 in Kurzform

x Häufungspunkt von B : $\Leftrightarrow \bigwedge_{U \in \mathcal{U}_x} \bigvee_{d \in B} d \in U \wedge d \neq x$

Aufgabe 66:

Machen Sie sich klar, daß jede der folgenden beiden Aussagen zur Definition 27 äquivalent ist:

- (1) x HP von $B \Leftrightarrow$ Jedes Element der Umgebungsbasis von x enthält mindestens ein von x verschiedenes Element aus B .
- (2) x HP von $B \Leftrightarrow$ Jede offene Umgebung von x enthält mindestens ein von x verschiedenes Element aus B .

Beispiel 34:

In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ hat die Menge

$$D = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \cup \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

die Häufungspunkte 0 und 1.

Am Beispiel 34 wird sichtbar:

Häufungspunkte einer Menge können auch zu ihr gehören.

Beispiel 35:

In $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ hat das offene Intervall $I = (-1; 1)$ die Häu-

fungungspunkte -1 und 1 und außerdem sind alle Punkte von I Häufungspunkte von I . Die Menge der Häufungspunkte von I ist das abgeschlossene Intervall $[-1; 1]$

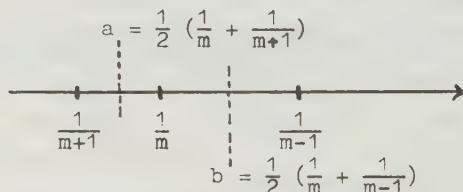
Beispiel 36:

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hat in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ folgende Häufungspunkte: (a) jedes $x \in \mathbb{Q}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$

(b) außerdem ist noch jede irrationale Zahl Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$. D.h. jede reelle Zahl ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

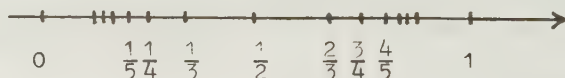
Beweis als Aufgabe 67!

Aus Beispiel 35 und 36 könnte man voreilig schließen, daß die zur Menge B gehörenden Punkte stets Häufungspunkte von B sind. Dies ist nicht wahr. Z.B. hat die Menge $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ nur den Punkt 0 als Häufungspunkt. Keiner der Punkte von B selbst ist Häufungspunkt, denn zu $\frac{1}{m} \in B$ können wir eine Umgebung angeben, die außer $\frac{1}{m}$ selbst keinen weiteren Punkt von B enthält, nämlich $(a; b)$.



Aufgabe 68:

In der Menge D des Beispiels 34 sollen alle Punkte, die Häufungspunkte von D sind, nachgewiesen werden und alle Punkte von D , die nicht Häufungspunkte von D sind.



Definition 28

Ein Punkte der Menge B, der nicht Häufungspunkt dieser Menge ist, heißt ein isolierter Punkt der Menge B.

Beispiel

Alle Punkte von $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ sind isolierte Punkte von B, denn wir haben auf S. 147 gezeigt, daß für jedes $x \in B$ gilt: x ist nicht Häufungspunkt von B.

Aufgabe 69:

Beweisen Sie:

x ist genau dann isolierter Punkt von B, wenn es eine Umgebung von x gibt, in der x der einzige Punkt aus B ist.

Beispiel 37:

Die Teilmenge $\mathbb{Z}$ von $\mathbb{R}$ besteht im topologischen Raum $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ nur aus isolierten Punkten. Die Umgebung $(2,5; 3,5)$ von 3 enthält z.B. nur den Punkt $3 \in \mathbb{Z}$ und keinen anderen aus $\mathbb{Z}$.

Beispiel 38:

In Aufgabe 68 haben Sie gezeigt, daß

$D = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ 1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ die Häufungspunkte 0 und 1 hat und sonst aus lauter isolierten Punkten besteht.

Die bisherigen Beispiele sind alle aus dem topologischen Raum $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ genommen. In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ erscheinen die Bezeichnungen Häufungspunkt einer Menge und isolierter Punkt auch anschaulich als plausible Bezeichnungen. Nun sollen auch Beispiele aus solchen topologischen Räumen untersucht werden, in denen uns die Anschauung nicht helfen kann; wir können trotzdem die Definitionen 27 und 28 anwenden.

Beispiel 39:

$(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum mit $M = \{a, b, c, d\}$ und
 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, M\}$

Der Punkt a ist isolierter Punkt von M , die Punkte b, c und d sind jeweils Häufungspunkte von M .

Zur Begründung von letzterem zieht man am besten die zur Definition 27 äquivalente Aussage (2) von S. 146 heran.¹⁾

Aufgabe 70:

Für $(M, \mathcal{T})$ aus Beispiel 39 sollen alle isolierten Punkte und alle Häufungspunkte von $B = \{c, d\}$ gefunden werden. Lösen Sie dieselbe Aufgabe für $C = \{a, c, d\}$.

Beispiel 40:

Soll mit Beispiel 37 verglichen werden.

Wir statteten $\mathbb{Z}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, G, U, \mathbb{Z}\}$ ²⁾ aus, dann ist in $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ jedes $x \in \mathbb{Z}$ Häufungspunkt von $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 71:

In $(\mathbb{I}, \mathcal{T}_{\mathbb{I}})$ soll die Menge der Häufungspunkte für folgende Mengen bestimmt werden

(a) $A = \{x \in \mathbb{I} \mid 0 < d(x, \emptyset) < 2\}$

(b) $B = \{(x_1 | x_2) \in \mathbb{I} \mid 0 \leq x_2 \leq 1 \wedge x_1 = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

(c) $K = \{x \in \mathbb{I} \mid d(x, \emptyset) = 1\}$

(d) $\{z\}$

Aufgabe 72:

Begründen Sie: In einem hausdorffschen Raum kann eine einpunktige Menge $\{x\}$ keinen Punkt $y \neq x$ als Häufungspunkt haben.

1) Diese nennen wir im folgenden immer Definition 27*

2) G sei die Menge der geraden ganzen Zahlen einschl. 0
 U sei die Menge der ungeraden ganzen Zahlen

Aufgabe 73:

$M = \{a, b, c, d\}$ sei mit der indiskreten Topologie $\tau = \{\emptyset, M\}$ ausgestattet. Man suche alle Häufungspunkte der Menge $\{b\}$, ferner alle Häufungspunkte der Menge $\{c, d\}$, ferner alle Häufungspunkte der Menge M .

Aufgabe 74:

Was können Sie über isolierte Punkte von Teilmengen eines Raumes aussagen, der mit der indiskreten Topologie ausgestattet ist? (Begründen Sie Ihre Antwort genau!)

Aufgabe 75:

Eine Menge M mit mindestens 2 Elementen sei mit der diskreten Topologie ausgestattet. Können Sie hinsichtlich der Häufungspunkte oder der isolierten Punkte von Teilmengen von M allgemeine Aussagen machen?

Bemerkung:

(Wenn Sie in Ihrem Analysisunterricht den Begriff "Häufungspunkt einer Folge" nicht kennengelernt haben, dürfen Sie diese Bemerkung überspringen.)

Die Begriffe "Häufungspunkt einer Menge" und "Häufungspunkt einer Folge" müssen gut auseinandergehalten werden. Ein Punkt x heißt Häufungspunkt der Folge $\langle a_n \rangle$, wenn in jeder Umgebung von x unendlich viele Folgenglieder liegen. Wir sind versucht zu meinen, die Häufungspunkte einer Folge würden mit den Häufungspunkten der Wertemenge der Folge übereinstimmen. Ein Beispiel zeigt, daß dies nicht stets der Fall sein muß.

Die Folge $\langle (-1)^n \rangle$, eine sogenannte alternierende Folge, hat als Häufungspunkte (der Folge) die Punkte -1 und 1 . Die Wertemenge $\{-1; 1\}$ der Folge hat jedoch keine Häufungspunkte in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, sie besteht aus den isolierten Punkten -1 und 1 .
(Finden Sie weitere Beispiele!)

Aufgabe 76:

Stellen Sie nochmals Beispiele für folgende Fälle zusammen:

(A^* stehe hier für die Menge der Häufungspunkte von A)

- (a) $A^* = \emptyset$
- (b) $A^* \neq \emptyset$ und $A \cap A^* = \emptyset$
- (c) A^* echte Obermenge von A
- (d) $A^* = A$
- (e) $A^* \neq \emptyset$ und $A^* \not\subseteq A$

Betrachten wir nun nochmals in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ die Menge $I = (-1; 1)$. Wenn wir die beiden Häufungspunkte -1 und 1 von I , die nicht in I liegen, zu I hinzunehmen, erhalten wir das abgeschlossene Intervall $\bar{I}$. Wir vermuten, daß auch aus einer beliebigen anderen Menge eine abgeschlossene Menge wird, wenn man zu ihren Punkten ihre Häufungspunkte hinzunimmt.

Nehmen wir z.B. zu den Punkten von $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq d(x, \mathcal{O}) < 4\}$ alle Häufungspunkte hinzu, die nicht schon zur Menge gehören, so müssen wir M mit der Menge $K = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, \mathcal{O}) = 4\}$ vereinigen (der Menge der Punkte der Kreislinie um $\mathcal{O}$ mit Radius 4). Wir erhalten $\bar{M} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq d(x, \mathcal{O}) \leq 4\}$, eine abgeschlossene Menge in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

Wir wollen die obige Vermutung auch in einem topologischen Raum erproben, in dem uns die Anschauung nicht hilft.

Für den topologischen Raum des Beispiels 39 (S. 149) soll die nachfolgende Tabelle ausgefüllt werden (Aufgabe 77).

$$\begin{aligned}
 M &= \{a, b, c, d\} \quad \text{und} \\
 \mathcal{T} &= \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, M\} \\
 c\mathcal{T} &= \{\dots\dots\dots\}
 \end{aligned}$$

(1) $A \subseteq M$	(2) Menge der HP von A	(3) Vereinigungs- menge	(4) abgeschlossen ja/nein?
$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	ja
$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	ja
$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	M	ja
$\{b, c\}$			
$\{c, d\}$			
$\{a, b, c\}$			
$\{b, c, d\}$			
$\{b\}$			

Aufgabe 78:¹⁾

Gegeben sei ein endlicher topologischer Raum $(M, \mathcal{T})$. Die einzelnen Schritte, die nötig sind, um die Menge aller Häufungspunkte einer gegebenen Menge $D (\subseteq M)$ zu bestimmen, sollen in einem Ablaufdiagramm dargestellt werden.²⁾

Wir betrachten die Tabelle zu Aufgabe 77 nochmals genauer. Hierzu halten wir speziell die Spalten (1) und (3) aufmerksam nebeneinander. Wir sehen: Zu jeder Menge A aus Spalte (1) steht in Spalte (3) eine abgeschlossene Obermenge, - genauer: die kleinste abgeschlossene Obermenge von A (was wir mit Hilfe der Menge $\mathcal{C}\mathcal{T}$ aller abgeschlossenen Mengen von $(M, \mathcal{T})$ rasch überblicken). Die kleinste abgeschlossene Obermenge von A haben wir auf S. 84 die **a b g e - s c h l o s s e n e H ü l l e** von A genannt und mit $\bar{A}$ abgekürzt.

- 1) Darf entfallen, wenn die Erstellung von Ablaufdiagrammen unbekannt ist.
- 2) Siehe die entsprechende Aufgabe für die Konvergenzuntersuchung auf S. 131 (Aufgabe 53).

Wir sprechen folgende Behauptung aus:

Satz 13

In jedem topologischen Raum (M, τ) ist die Vereinigung einer Menge A ($A \subseteq M$) mit der Menge aller Häufungspunkte von A gleich der abgeschlossenen Hülle von A .

Für die Vereinigungsmenge aus A und der Menge ihrer Häufungspunkte führen wir vorübergehend die Abkürzung $\tilde{A}$ ein. Dann muß für den Beweis des Satzes 13 im einzelnen folgendes gezeigt werden:

- (1) $A \subseteq \tilde{A}$
- (2) $\tilde{A}$ abgeschlossene Menge in (M, τ)
- (3) $\tilde{A}$ ist Teilmenge jeder abgeschlossenen Menge B , für die $A \subseteq B$ gilt.

Während (1) unmittelbar aus der Definition von $\tilde{A}$ folgt¹⁾, erfordern die Beweise von (2) und (3) mehr Mühe. Es ist günstig, zunächst einige allgemeine Eigenschaften der Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$ zu sammeln.

Aufgabe 79:

Versuchen Sie aus der Tabelle zu Aufgabe 77 und den Beispielen aus Aufgaben 71 und 76 Hinweise auf allgemeine Eigenschaften der Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$ zu finden.

1) Denn für beliebige Mengen E und F gilt stets:
 $E \subseteq (E \cup F)$

Satz 14

In jeder Topologie $(M, \mathcal{T})$ gilt für alle Teilmengen B von M : $\tilde{B} = B \Leftrightarrow B$ ist abgeschlossen.

Beweis:

1. Beweisrichtung

Sei $\tilde{B} = B \Rightarrow$ kein Punkt außerhalb von B ist Häufungspunkt von $B \Rightarrow$ für alle $x \in B'$ gilt: x ist nicht Häufungspunkt von $B \Rightarrow$ für jedes $x \in B'$ gibt es mindestens eine offene Umgebung O , die keinen Punkt von B enthält (vgl. Def. 27*) $\Rightarrow$ für alle $x \in B'$ gilt: B' ist Umgebung von x (Def. 14, S. 108) $\Rightarrow$ (n. Satz 7, S. 112) B' ist offene Menge $\Rightarrow B$ ist abgeschlossen

2. Beweisrichtung

Sei B abgeschlossen $\Rightarrow B'$ ist offen, d.h. nach Satz 6 B' ist Umgebung jedes $x \in B' \Rightarrow$ zu jedem $x \in B'$ gibt es eine Umgebung (nämlich B'), die keinen Punkt von B enthält $\Rightarrow$ kein $x \in B'$ ist Häufungspunkt von $B \Rightarrow \tilde{B} = B$

Aufgabe 80:

Verwenden Sie den Satz 14 um im topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ aus Aufgabe 18 (S. 77) über die Häufungspunkte von Teilmengen $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ gültige Aussagen zu machen.

Satz 15

Sei $(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, dann gilt für alle $B \subseteq M$: $\tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}$

Für den Beweis ist es günstig in einer Menge $\tilde{B}$ nicht zwischen Punkten von B und Häufungspunkten von B , die nicht zu B gehören, unterscheiden zu müssen.

Hilfssatz

$x \in \tilde{B} \iff$ für jede offene Umgebung U von x gilt:
 $U \cap B \neq \emptyset$

Beweis:

1. Beweisrichtung

$x \in \tilde{B} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder } x \in B \Rightarrow \text{für alle offenen Umgebungen } U \\ \text{von } x : x \in U \cap B \Rightarrow U \cap B \neq \emptyset \\ \text{oder } x \text{ ist Häufungspunkt von } B \text{ aber } x \notin B \Rightarrow \text{für} \\ \text{alle off. Umg. } U \text{ v. } x \text{ ex. n. Def. 27*} \\ y \in U \cap B \Rightarrow U \cap B \neq \emptyset \end{array} \right.$

2. Beweisrichtung

Für alle offenen Umgebungen U von x gelte: $U \cap B \neq \emptyset$.

Es können 2 Fälle eintreten:

- 1) $x \in B \Rightarrow$ (n.Def.) $x \in \tilde{B}$
- 2) $x \notin B \Rightarrow$ (n.Vorauss.) für alle off. Umg. von x
 ex. $y \neq x$ mit: $y \in U \cap B \Rightarrow x$ HP von $B \Rightarrow x \in \tilde{B}$

Beweis zu Satz 15

Da nach Def. stets $A \subseteq \tilde{A}$, gilt $\tilde{B} \subseteq \tilde{\tilde{B}}$. Somit muß nur noch $\tilde{\tilde{B}} \subseteq \tilde{B}$ gezeigt werden, um die Gleichheit $\tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}$ zu beweisen.

Sei $x \in \tilde{\tilde{B}}$ und U eine beliebige off. Umg. von x , dann ist nach Hilfssatz $U \cap \tilde{B} \neq \emptyset$, d.h. es ex. $y \in \tilde{B}$ mit: $y \in U$. U ist also auch off. Umg. von $y \in \tilde{B} \Rightarrow$ (n.Hilfss.) $U \cap B \neq \emptyset$.

Da somit für jede off. Umg. U von x : $U \cap B \neq \emptyset$.

$\Rightarrow$ (n.Hilfss.) $x \in \tilde{B}$.

Die allgemeine Aussage (2) über $\tilde{\tilde{A}}$ auf S.153 ergibt sich sofort, wenn wir Satz 14 und Satz 15 gleichzeitig anwenden.

Satz 16

Sei $(M, \mathcal{V})$ ein topologischer Raum.
Für alle $A \subseteq M$ ist $\tilde{A}$ abgeschlossen.

Beweis:

Nach Satz 15 gilt stets $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$. Wir benennen $\tilde{A}$ in B um,
dann steht da: $\tilde{B} = B \Rightarrow$ (n. Satz 14) B ist abgeschlossen,
also ist $\tilde{A}$ abgeschlossen.

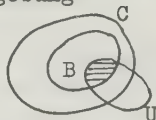
Für den Beweis der Aussage (3) von S. 153 benötigen wir noch
eine weitere allgemeine Eigenschaft der Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$.

Satz 17

Für beliebige Teilmengen B und C eines topologischen
Raumes gilt stets: wenn $B \subseteq C$, dann $\tilde{B} \subseteq \tilde{C}$

Beweis:

Sei $x \in \tilde{B} \Rightarrow$ (n. Hilfssatz) für jede Umgebung
 U von x gilt: $U \cap B \neq \emptyset$; und dann
auch $U \cap C \neq \emptyset$ denn $U \cap B \subseteq U \cap C$
 $\Rightarrow$ (n. Hilfssatz) $x \in \tilde{C}$



Satz 18

Für jedes $A \subseteq M$ in einem beliebigen topologischen
Raum gilt:
 $\tilde{A}$ ist Teilmenge jeder abgeschlossenen Obermenge B
von A .

Beweis:

Sei B eine abgeschlossene Menge mit $A \subseteq B$, dann folgt:

$$\left. \begin{array}{l} B \text{ abgeschlossen} \Rightarrow \text{n.Satz 14 } \tilde{B} = B \\ \text{und } A \subseteq B \Rightarrow \text{n.Satz 17 } \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{A} \subseteq B$$

Der zurückgestellte Beweis von Satz 13 von S. 153 ist somit bereits erbracht, denn:

- (1) lt. Definition gilt bereits: $A \subseteq \tilde{A}$
- (2) lt. Satz 14 gilt: $\tilde{A}$ ist abgeschlossen
- (3) lt. Satz 18 gilt: $\tilde{A}$ ist Teilmenge jeder abgeschlossenen Obermenge von A

Damit ist gezeigt: $\tilde{A} = \bar{A}$ (abgeschlossene Hülle von A)

Die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ einer Menge A kann somit auf zweierlei Arten ermittelt werden:

- 1) als Vereinigungsmenge aus A und der Menge der Häufungspunkte von A
- 2) als kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält, d.h. als Durchschnittsmenge aus allen abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

Aufgabe 81:

Man bestimme im topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ mit

$$\begin{aligned} M &= \{a, b, c, d, e\} \text{ und} \\ \mathcal{T} &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \\ &\quad \{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \\ &\quad \{b, c, d, e\}, M\} \end{aligned}$$

die abgeschlossene Hülle jeder rechts aufgelisteten Mengen B .

B	$\bar{B}$
$\{a\}$	
$\{b, e\}$	
$\{c, d\}$	
$\{d, e\}$	
$\{a, b, e\}$	

Aufgabe 82:

Bilde in $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_{\mathbb{R}})$ die abgeschlossenen Hüllen folgender Mengen:

$$(-\frac{1}{2}; 0)$$

$$[7; 13) \cup (14, 5; 14, 6)$$

$$[-10; -5]$$

$$(1, 5; \infty)$$

$$(\infty; 0]$$

$$(-2; 0) \cup (0; 1)$$

Hinweis: Stellen Sie die angegebenen Mengen auf dem Zahlenstrahl dar, wobei Sie die Rot-Grün-Übereinkunft benutzen.

Aufgabe 83:

Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Sätze 14 bis 18.

$$1) \overline{\emptyset} = \emptyset$$

$$2) \overline{B \cup C} = \overline{B} \cup \overline{C}$$

Hinweis: Benutzen Sie, daß für je zwei Mengen B, C stets gilt: $B \subseteq (B \cup C)$ und ebenso $C \subseteq (B \cup C)$ und außerdem, daß wenn $A \subseteq M$ und $D \subseteq M$, dann auch $(A \cup D) \subseteq M$ gilt.

Aufgabe 84:

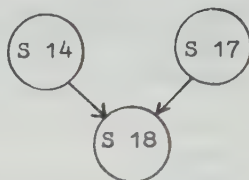
Überlegen Sie an selbstgewählten Beispielen aus $(\mathbb{R}, \mathcal{I}_{\mathbb{R}})$, ob auch stets $\overline{B \cap C} = \overline{B} \cap \overline{C}$ gilt. Wenn nein, welche Beziehung besteht dann allgemein anstelle der Gleichheitsbeziehung?

Aufgabe 85:

Gehen Sie die Beweise für die Sätze 14 bis 18 nochmals unter dem Gesichtspunkt durch, ob die Sätze auch

in anderer Reihenfolge aufeinanderfolgen könnten.

(Hinweis: Nebenstehendes Schema bedeutet: im Beweis von Satz 18 werden die Aussagen von Satz 14 und Satz 17 verwendet)



Aufgabe 86:¹⁾

Man gebe auf der reellen Zahlengeraden Beispiele offener Mengen A , B an derart, daß die vier Mengen $A \cap \bar{B}$, $B \cap \bar{A}$, $\overline{A \cap B}$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ sämtlich voneinander verschieden sind.

Aufgabe 87:¹⁾

Man gebe ein Beispiel zweier Intervalle A , B auf der reellen Zahlengeraden an, für die $A \cap \bar{B}$ nicht in $\overline{A \cap B}$ enthalten ist.

Aufgabe 88:

$\mathbb{R}$ sei mit der in Aufgabe 18 (S. 77) beschriebenen Topologie der kofiniten Mengen ausgestattet. Zeigen Sie, daß für die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ von Teilmengen A von $\mathbb{R}$ gilt:

$$\bar{A} = \begin{cases} A, & \text{wenn } A \text{ endlich} \\ \mathbb{R}, & \text{wenn } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

Zu einer gegebenen Menge B kann auf zweierlei Arten $\bar{B}$ bestimmt werden. Manchmal ist es zweckmäßig, die erste Art zu wählen. Hierbei müssen nur noch die nicht zur Menge gehörenden Häufungspunkte von B gefunden werden. Dies wenden wir in der folgenden Aufgabe an.

1) Entnommen aus Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Braunschweig 1971, S. 50

Aufgabe 89:

In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ bestimme man die abgeschlossene Hülle der Menge $D = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}_{\mathbb{R}}$

Aufgabe 90:

In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ zeige man, daß $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Hinweis: Siehe Beispiel 36, S. 147.

Für Teilmengen eines topologischen Raumes (M, τ) , deren Hülle gleich M ist, hat man eine spezielle Bezeichnung:

Definition 29

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes (M, τ) heißt dicht in M , wenn $\overline{A} = M$ ist.

Beispiele:

In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$: Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist dicht in $\mathbb{R}$, die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist ebenfalls dicht in $\mathbb{R}$. ¹⁾

In topologischen Räumen (M, τ) mit indiskreter Topologie $\tau = \{\emptyset, M\}$ ist jede nicht leere Teilmenge von M dicht in M . (Begründung als Übung!)

¹⁾ Für den Mathematiker ist zusätzlich noch bedeutsam, daß $\mathbb{R}$ abzählbare dichte Teilmengen besitzt. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. (Definition der Abzählbarkeit auf S. 182). Näheres über die Bedeutung der Existenz abzählbarer dichter Teilmengen für einen topologischen Raum lese man nach bei Lipschutz, S.: Theory and problems of general topology, S. 132; Franz, W.: Topologie I, S. 45 ff und S. 52; Grottemeyer, K.P.: Topologie, S. 32; Alexandroff, P.S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, S. 171

Aufgabe 91:

In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$: Liegen folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$ dicht in $\mathbb{R}$?

- a) $\mathbb{Z}$ b) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ c) $[0; \infty)$

Aufgabe 92:

Ziehen Sie aus Aufgabe 88 die Folgerung, welche Teilmengen in $\mathbb{R}$ dicht liegen, wenn $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie (siehe S. 77) ausgestattet ist.

2.4.2 Inneres, Äußeres, Rand einer Menge

Der Begriff der abgeschlossenen Hülle einer Menge macht es möglich, den Rand einer beliebigen Punktmenge ohne Zuhilfenahme der Anschauung, noch der eines Koordinatensystems, noch der einer Metrik zu definieren.

Um die Definition aufzufinden, machen wir uns folgendes klar:

a) In $(\mathbb{U}, \gamma_{\mathbb{U}})$ gilt: Die abgeschlossene Hülle einer gegebenen offenen Kreisscheibe $K(z, \varrho)$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{K}(z, \varrho)$.

Die Komplementärmenge von $K(z, \varrho)$

(nebenstehend abgebildetes K') ist

eine abgeschlossene Menge und

stimmt somit mit ihrer Hülle überein. ($K' = \bar{K}'$). Der Durchschnitt

$\bar{K}(z, \varrho) \cap \bar{K}'$ aus der Hülle von $K(z, \varrho)$

und der Hülle des Komplements von $K(z, \varrho)$ ist offensichtlich gerade die Menge $\{x | d(z, x) = \varrho\}$, also die Menge der Punkte des Randes der Kreisscheibe.



b) In $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ gilt: Die abgeschlossene Hülle des offenen Intervalls $I = (1; 5)$ ist das abgeschlossene Intervall $\bar{I} = [1; 5]$, die Hülle des Komplements von I ist die Menge $(-\infty; 1] \cup [5; \infty)$. Der Durchschnitt der beiden Hüllen besteht genau aus den beiden Punkten 1 und 5, welche man als Randpunkte des gegebenen Intervalls I bezeichnet.

Wir wollen den Rand einer Menge in einem beliebigen topologischen Raum entsprechend definieren.

Definition 30

In einem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ nennt man den Durchschnitt aus der Hülle $\bar{B}$ einer Menge B und der Hülle $\bar{B}^c$ der Komplementärmenge ¹⁾ B^c Rand der Menge B .

Definition 30 in Kurzform

$$\text{rd}B = \bar{B} \cap \bar{B}^c$$

Man kann sich an weiteren Beispielen aus $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und aus $(\mathbb{J}, \mathcal{T}_{\mathbb{J}})$ überzeugen, daß man auf obige Art genau die Punktmengen erhält, die man auch anschaulich aus der bisherigen Erfahrung als Rand der jeweiligen Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{J}$ bezeichnet.

Aufgabe 93:

Ermitteln Sie in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ den Rand folgender Mengen

- | | |
|------------------------------|--------------------------------------|
| a) $[-7; 2)$ | e) $\mathbb{R}$ |
| b) $(-1; 0) \cup (0; 1)$ | f) $\mathbb{Q}$ |
| c) $(-\infty; 8)$ | g) $\mathbb{Z}$ |
| d) $[0; 2] \cup [7; \infty)$ | h) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ |

Aufgabe 94:

In der Topologie $(M, \mathcal{T})$ aus Aufgabe 81 (S.157) bestimme man den Rand der Mengen $\{a\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{d, e\}$ und $\{a, b, e\}$.

1) Komplementärmenge B^c von B (in M) : $B^c = M \setminus B$

Die Aufgaben weisen uns auf wichtige Eigenschaften des Randes jeder Menge in jeder Topologie hin:

Satz 19

In einem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ gilt stets:
Der Rand einer Menge ist abgeschlossen.

Beweis:

$$\text{rd}A = \bar{A} \cap \overline{A^c} \quad (\text{nach Definition})$$

$\bar{A}$ und $\overline{A^c}$ sind (nach Satz 16) abgeschlossene Mengen $\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\text{rd}A$ ist abgeschlossen, da der Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist (siehe S.80)

Satz 20

Es gilt stets: Der Rand einer Menge A ist gleich dem Rand ihres Komplements A^c .

Beweis:

$$\text{rd}A = \bar{A} \cap \overline{A^c} \quad \text{und} \quad \text{rd}A^c = \overline{A^c} \cap \overline{(A^c)^c}$$

Nach den Gesetzen für Komplementärmengenbildung gilt:

$$(A^c)^c = A; \text{ damit ist } \text{rd}A^c = \overline{A^c} \cap \overline{A} = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \text{rd}A$$

Aufgabe 95:

In $(M, \mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, M\}$, der indiskreten Topologie:
Sei $A \subsetneq M$ und $A \neq \emptyset$. Bestimmen Sie die abgeschlossene Hülle von A und den Rand von A .

Aufgabe 96:

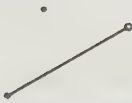
Machen Sie allgemeine Aussagen über die abgeschlossene Hülle und den Rand einer Menge im topologischen Raum $(M, \mathcal{P}(M))$! Begründen Sie diese Aussagen!

Bemerkung

Der Rand einer Menge kann - aber muß nicht - Punkte mit der Menge gemeinsam haben. Der Rand einer Menge kann auch leer sein.

Aufgabe 97:

In $(\mathbb{I}, \mathcal{F}_{\mathbb{I}})$ bestimme man den Rand jeder der unten schematisch dargestellten Mengen:



An den Beispielen aus $\mathbb{I}$ der vorangegangenen Aufgabe sieht man, daß es sowohl Randpunkte einer Menge B geben kann, die zu ihr gehören als auch solche, die nicht zu ihr gehören.

In $(\mathcal{M}, \mathcal{T}_{\mathcal{M}})$ betrachten wir folgende schematisch dargestellte Mengen:

Menge B

$\text{rd} B$

Menge der Punkte von B,
die nicht zu $\text{rd} B$ gehören
also $B \setminus \text{rd} B$



Wir stellen fest, daß $B \setminus \text{rd} B$ eine offene Menge ist und ganz in B liegt. Sie besteht nur aus "inneren" Punkten von B.

Die allgemeine Definition des Inneren einer Menge in einem beliebigen topologischen Raum schließt sich an diese anschaulich gewonnene Bezeichnungsweise an:

Definition 31

In $(M, \mathcal{T})$ heißt die Differenzmenge¹⁾ aus einer Menge B und ihrem Rand das Innere der Menge B oder die Menge der inneren Punkte von B.

Abkürzung: B

1) Definition der Differenzmenge

$A \setminus C := \{x \mid x \in A \wedge x \notin C\}$. Dazu ist es nicht nötig, daß $C \subseteq A$.

Definition 31 in Kurzform

$$\underline{B} = B \setminus \text{rd}B$$

Aus der Definition 31 folgt unmittelbar, daß stets

$$\underline{B} \subseteq B$$

was auch unserer anschaulichen Vorstellung vom Inneren einer Punktmenge entspricht.

Aufgabe 98:

Bestimmen Sie in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ zu den in Aufgabe 93 angegebenen Mengen jeweils das Innere.

Aufgabe 99:

Mit Hilfe der Aufgaben 81 (S.157) und 94 (S.163) sollen Sie folgende Tabelle anfertigen:

$$M = \{a, b, c, d, e\}$$

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d, e\}, M\}$$

$$c\mathcal{T} = \dots\dots\dots$$

$\overline{B^c}$	Kompl. B^c	Inneres $\underline{B}$	B	Hülle $\overline{B}$	Rand $\text{rd}B$
			$\emptyset$ $\{a\}$ $\{a, c, d\}$ $\{c, d\}$ $\{b, e\}$ $\{d, e\}$ $\{a, b, e\}$ $\{b, c, d, e\}$		

An der Tabelle zu Aufgabe 99 können folgende in jedem topologischen Raum geltenden Aussagen abgelesen werden:

$$rdB \subseteq \bar{B} \quad rdB \subseteq B^{\circ}$$

$$\underline{B} \subseteq B \subseteq \bar{B}$$

$$B \setminus rdB = \bar{B} \setminus rdB = \underline{B}$$

Das anschauliche Beispiel von S. 166 legt die Vermutung nahe, daß B stets die "größte" offene Menge ist, die in B enthalten ist. Diese Vermutung bestätigt sich an der Tabelle zu Aufgabe 99.

Satz 21

In jedem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ gilt für beliebiges $B \subseteq M$: Das Innere von B ist die größte¹⁾ offene Menge, die in B enthalten ist.

Wir stellen die Entsprechung zwischen Satz 13 (S. 153) und Satz 21 fest. Wir erwarten, daß deshalb der Weg zum Beweis von Satz 21 entsprechend sein könnte und erarbeiten deshalb zunächst die folgenden Sätze 22 bis 24.²⁾

Satz 22

In jedem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ gilt für beliebiges $B \subseteq M$: B ist offen.

1) A heiße größte offene Menge, die in B enthalten ist:
 $\Leftrightarrow$ A offen und für alle offenen Teilmengen T von B gilt: $T \subseteq A$

2) Finden Sie selbst auf S. 154 ff die entsprechenden Sätze über B. In diesem Zusammenhang sind auch die Überlegungen zur Aufeinanderfolge der Sätze 14 bis 18 bedeutsam (Aufgabe 85, S.158).

Beweis:

Unter Verwendung der De Morganschen Regel¹⁾ leiten wir zunächst aus den Definitionen 30 und 31 ab:

$$\begin{aligned}\underline{B} &= B \setminus \text{rd}B = B \setminus (\overline{B} \cap \overline{B'}) = \\ &= (B \setminus \overline{B}) \cup (B \setminus \overline{B'}) = \emptyset \cup (B \setminus \overline{B'}) = B \setminus \overline{B'} = M \setminus \overline{B'}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, denn:

$$\begin{aligned}x \in M \setminus \overline{B'} &\Leftrightarrow x \notin \overline{B'} \Leftrightarrow x \notin B' \wedge x \text{ ist nicht HP von } B' \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \text{ ist nicht HP von } B' \Leftrightarrow x \in B \setminus \overline{B'}\end{aligned}$$

Aus $\underline{B} = M \setminus \overline{B'}$ folgt sofort $\underline{B}$ ist offen, denn $\overline{B'}$ ist laut Satz 16 abgeschlossen.

Die oben bewiesene Gleichheit $\underline{B} = B \setminus \overline{B'} = M \setminus \overline{B'}$ wird in den Beweisen der folgenden Sätze verwendet. In den Beweisen sind nur Umformungen von Gleichheitsaussagen über Mengen nötig, so daß sie leicht auszuführen sind.²⁾

Satz 25

In jedem topologischen Raum (M, τ) gilt für beliebiges $B \subseteq M$: B ist offen $\Leftrightarrow \underline{B} = B$

1) $A \setminus (C \cap D) = (A \setminus C) \cup (A \setminus D)$ für beliebige Mengen A, C, D

2) Sie sollten deshalb stets versuchen, die Beweise möglichst ohne Hilfe des Buches selbst aufzuzeigen.

Beweis:

1. Beweisrichtung: Sei B offen $\Rightarrow B'$ abgeschlossen $\Rightarrow$
 (n.Satz 14) $\overline{B'} = B' \Rightarrow$ (da $\underline{B} = M \setminus \overline{B'}$) $\underline{B} = M \setminus B' = B$
2. Beweisrichtung: Sei $\underline{B} = B \Rightarrow$ (da nach Satz 22 $\underline{B}$
 offen) B ist offen.

Satz 24

Für je zwei Mengen A und B gilt in jedem topologischen Raum (M, τ) : wenn $A \subseteq B$, dann $\underline{A} \subseteq \underline{B}$

Beweis:

Sei $A \subseteq B \Rightarrow A' \supseteq B' \stackrel{1)}{\Rightarrow}$ (n.Satz 17, S.156) $\overline{A'} \supseteq \overline{B'}$
 $\Rightarrow M \setminus \overline{A'} \subseteq M \setminus \overline{B'}$

Da $\underline{A} = M \setminus \overline{A'}$ und $\underline{B} = M \setminus \overline{B'}$ folgt $\underline{A} \subseteq \underline{B}$

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 22 und 23 ist die Aussage, daß stets $\underline{B} = \underline{\underline{B}}$ gilt. (Beweis als Übung)

1) Bei Komplementärmengenbildung dreht sich jeweils das Inklusionszeichen um.

Nach dieser Vorarbeit gelingt der Beweis von Satz 21 ohne Anstrengung.

Beweis von Satz 21:

$$\text{Sei } \left\{ \begin{array}{l} T \subseteq B \Rightarrow (\text{n. Satz 24}) \underline{T} \subseteq \underline{B} \\ \text{und} \\ T \text{ offen} \Rightarrow (\text{n. Satz 23}) \underline{T} = T \end{array} \right\} \Rightarrow T \subseteq \underline{B}$$

Damit ist gezeigt: $\underline{B}$ ist Obermenge jeder offenen Teilmenge von B . Da $\underline{B}$ nach Satz 22 offen ist und aus der Definition bereits $\underline{B} \subseteq B$ folgt, ist $\underline{B}$ somit die größte offene Teilmenge von B .

Aufgabe 100:

Untersuchen Sie an Beispielen aus $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$, $(M, \mathcal{T}_1)$ und $(M, \mathcal{T}_2)$ mit $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, M\}$ und $\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(M)$, ob folgende Aussagen in jedem topologischen Raum allgemeingültig sein könnten:

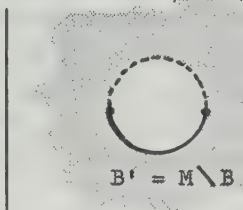
- a) $\underline{M} = M$
- b) $(\underline{B})' = \underline{B}'$ für alle $B \subseteq M$
- c) $(\overline{B})' = \underline{B}'$ für alle $B \subseteq M$
- d) $\overline{(\underline{B})} = \overline{B}$ und $\underline{(\overline{B})} = \underline{B}$ für alle $B \subseteq M$
- e) $\underline{A \cap B} = \underline{A} \cap \underline{B}$ für alle $A \subseteq M, B \subseteq M$
- f) $\underline{A \cup B} = \underline{A} \cup \underline{B}$ für alle $A \subseteq M, B \subseteq M$

Für die Aussagen, für die sich in allen vier angegebenen Räumen die Vermutung ihrer Allgemeingültigkeit verstärkt, soll ein allgemeiner Beweis erbracht werden.

Aufgabe 101:

Nehmen Sie Aufgabe 88 (S.159) zum Muster und versuchen Sie im topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ Aussagen über Rand und Inneres von beliebigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu machen. ($\mathcal{T}$ sei die Topologie der kofiniten Mengen von Aufgabe 18, S. 77).

Definierte man oben das Innere von Mengen in beliebigen topologischen Räumen, so ist zu erwarten, daß auch das "Äußere" einer Menge eine von der Anschauung unabhängige Festlegung erhält. In $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ holen wir uns anschauliche Anregung für eine plausible Festsetzung des Begriffs. Wir betrachten die Menge B und daneben ihre Komplementärmenge $B' = M \setminus B$.



Die Kreislinie (der Rand von B) trennt das Innere vom Äußeren von B . So haben wir bisher den Begriff gehandhabt. Wir haben somit unter dem Äußeren von B die Komplementärmenge B' ohne die Randpunkte von B verstanden, also: $B' \setminus \text{rd}B$. Da $\text{rd}B = \text{rd}B'$, ist das Äußere auch $B' \setminus \text{rd}B'$, was das Innere des Komplements bedeutet.

Definition 32

Im topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ verstehen wir unter dem Äußeren der Menge B ($B \subseteq M$) das Innere der Komplementärmenge von B .

Wir wollen hier keine eigene Abkürzung für das Äußere von B einführen, da die Definition sich bereits kurz darstellen läßt:

$$\text{Äußeres von } B : = \underline{B'}$$

Aufgabe 102:

In $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ soll zu den in Aufgabe 93 (S. 163) angegebenen Mengen das Äußere bestimmt werden.

Aufgabe 103:

- a) Die Tabelle zu Aufgabe 99 soll um eine zusätzliche Spalte erweitert werden, in der jeweils das Äußere zu jeder Menge eingetragen wird.
- b) Demonstrieren Sie an ausgewählten Beispielen, daß Hüllenbildung und Bildung des Inneren im allgemeinen nicht vertauschbar sind: Inneres von $\bar{B} \neq$ Hülle von $\underline{B}$. Gibt es hierfür auch Beispiele in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$?

Es ist aus den Definitionen leicht einzusehen, daß die drei Mengen: Inneres einer Menge A , Äußeres einer Menge A und Rand einer Menge A paarweise disjunkt¹⁾ sind. Dies stimmt mit unserer Erfahrung an anschaulichen Beispielen aus $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ überein.

Für weitere Ergebnisse über Hülle, Rand, Inneres, Äußeres einer Menge reicht unsere Zeit nicht. Sie finden in den auf S. 222 angegebenen Büchern solche Ergebnisse und werden erstaunt sein zu entdecken, daß in dem einen oder anderen topologischen Raum Aussagen über Hülle, Inneres, Rand, Äußeres gelten, die sich nicht mit unseren anschaulichen Vorstellungen von der Beziehung dieser Begriffe decken.

1) disjunkt heißt elementfremd.

2.5 Abbildungen topologischer Räume

2.5.1 Der allgemeine Abbildungsbegriff

Im Analysisunterricht werden vor allem Funktionen (= Abbildungen) von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Da im folgenden auch Abbildungen von einer beliebigen Menge nach einer (anderen) beliebigen Menge eine Rolle spielen, soll hier nochmals die Definition des Begriffs Abbildung vorgelegt werden. Grob gesagt, spricht man von einer Abbildung von einer Menge M nach einer Menge N , wenn jedem Element aus M genau ein Element aus N zugeordnet wird. Diese handliche "Umschreibung" ist zwar zur Bearbeitung von Aufgaben (wie 44 auf S. 119) dienlich, als mathematische Definition befriedigt sie nicht, da der Begriff "zuordnen" vorher definiert werden müßte.

Definition 33

Eine Abbildung ist gegeben durch drei Bestimmungstücke:

die Definitionsmenge M , die Zielmenge N und den Graph G der Abbildung. Der Graph G ist eine Menge von geordneten Paaren $(x|y)$ mit $x \in M$ und $y \in N$ für die gilt: zu jedem $x \in M$ gibt es genau ein $y \in N$, so daß $(x|y) \in G$.

Sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung von M nach N und G der Graph dieser Abbildung und $x \in M$. Dann heißt das eindeutig bestimmte Element $y \in N$, für das gilt $(x|y) \in G$ das Bild von x bei der Abbildung f und wird mit $f(x)$ bezeichnet. Die Menge aller Bilder von Elementen aus M nennt man die Wertemenge der Abbildung f .

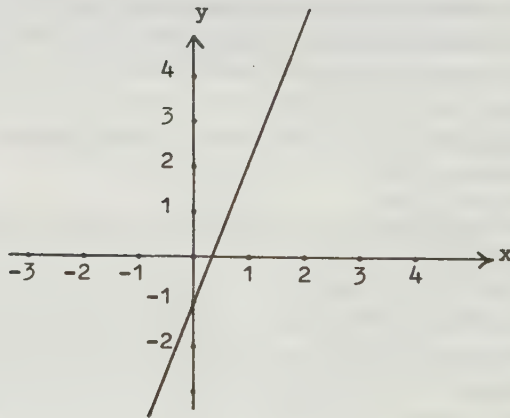
Beispiel 41:

Betrachten wir eine Funktion (Abbildung) f mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und der Zielmenge $\mathbb{R}$. Das jedem $x \in \mathbb{R}$ zugeordnete $y \in \mathbb{R}$ werde gefunden nach der Vorschrift : $y = 3x - 1$ ¹⁾

Die bisher gemachten Angaben über die Abbildung f werden kürzer folgendermaßen mitgeteilt:

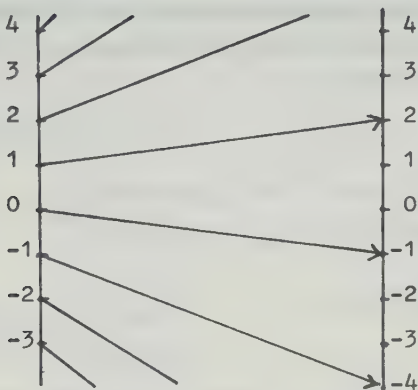
$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \text{mit } x & \longmapsto & 3x - 1 \end{array}$$

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt in einem kartesischen Koordinatensystem



1) Bisher haben Sie dies meist kurzerhand als Funktion bezeichnet.

Ausschnitt aus dem Pfeildiagramm der Abbildung
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Pfeildiagramm und kartesische Darstellung sind äquivalente Veranschaulichungen des Graphen einer Abbildung. Der Graph ist eine Menge von geordneten Paaren, eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zum Graphen des Beispiels gehören z.B. die Paare $(1|2)$, $(0|-1)$, $(3|8)$ usw. Jedes geordnete Paar findet sich wieder als ein Pfeil des Pfeildiagramms. Dabei ist die 1. Komponente des Paares der Startpunkt des Pfeils und die 2. Komponente sein Zielpunkt.

Aufgabe 104:

Zu folgenden Zuordnungsvorschriften sollen geeignete Definitions- und Zielmengen ($\subseteq \mathbb{R}$) gewählt werden, so daß wir Abbildungen erhalten.

a) $x \mapsto x^2 - 1$

b) $x \mapsto \frac{3x}{4x+5}$

c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

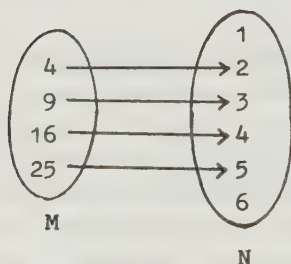
Geben Sie zu jeder der Abbildungen die Wertemenge an.
In welcher Beziehung stehen Wertemenge und Zielmenge der jeweiligen Abbildung?

Beispiel 42:

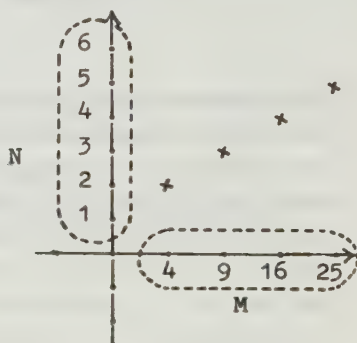
$M = \{4; 9; 16; 25\}$ und $N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Abbildung $f : M \longrightarrow N$ mit $x \mapsto \sqrt{x}$

Pfeildiagramm zu f :



Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem

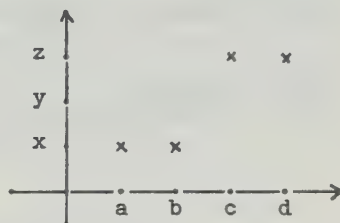
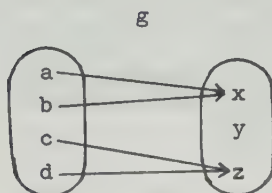


Der Graph besteht aus vier geordneten Paaren, nämlich $(4|2)$, $(9|3)$, $(16|4)$ und $(25|5)$. In der kartesischen Darstellung des Graphs entspricht das den eingezeichneten vier Punkten.

Beispiel 43:

$T = \{a, b, c, d\}$ und $S = \{x, y, z\}$ $g : T \longrightarrow S$

Anstelle durch eine Zuordnungsvorschrift kann eine Abbildung auch unmittelbar entweder durch das Pfeildia-
gramm oder durch den Graph vorgegeben werden.



Graph von $g = \{(a|x), (b|x), (c|z), (d|z)\}$

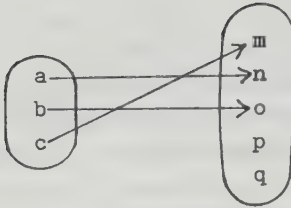
Die Forderung der Definition 33, daß jedem Element der Definitionsmenge der Abbildung genau ein Element ihrer Zielmenge zugeordnet sei, zeigt sich am Graphen darin, daß zu jedem Element von T genau ein geordnetes Paar im Graphen von g vorkommt, wovon es 1. Komponente ist.

Aufgabe 105:

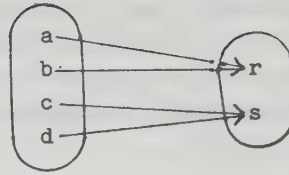
Sind folgende Paarmengen Graph einer Abbildung von A nach B? Die Mengen A und B mögen geeignet gewählt werden.

- 1) $\{(a|a), (a|c), (b|a), (c|b)\}$
- 2) $\{(s|m), (t|m), (r|m)\}$
- 3) $\{(1|a), (2|c), (3|a), (4|b), (5|c)\}$

Aus dem zurückliegenden Unterricht wissen wir:
Abbildungen können besondere Eigenschaften haben, dies zeigen die folgenden Beispiele.



injektiv
(aber nicht surjektiv)



surjektiv
(aber nicht injektiv)



(injektiv und surjektiv:
bijektiv)

Abbildungen können injektiv, surjektiv oder bijektiv sein. Diese besonderen Eigenschaften sind wie folgt definiert:

Definition 34

Eine Abbildung $f : M \longrightarrow S$ heißt

injektiv $\Leftrightarrow$ es zu jedem $y \in S$ höchstens ein $x \in M$ gibt, so daß $y = f(x)$

surjektiv $\Leftrightarrow$ es zu jedem $y \in S$ mindestens ein $x \in M$ gibt, so daß $y = f(x)$

bijektiv $\Leftrightarrow$ sie gleichzeitig injektiv und surjektiv ist; (d.h. genau dann, wenn es zu jedem $y \in S$ genau ein $x \in M$ gibt, so daß $f(x) = y$)

Für das Pfeildiagramm bedeutet Definition 34:

- f injektiv $\Leftrightarrow$ in jedem $y \in S$ endet höchstens ein Pfeil
 f surjektiv $\Leftrightarrow$ in jedem $y \in S$ endet mindestens ein Pfeil
 f bijektiv $\Leftrightarrow$ in jedem $y \in S$ endet genau ein Pfeil

Am Graphen der Abbildung können die drei genannten Eigenschaften schnell entdeckt werden:

- f injektiv $\Leftrightarrow$ im Graph von f gibt es zu jedem $y \in S$ höchstens ein Paar $(x|y)$, das y als zweite Komponente aufweist
 f surjektiv $\Leftrightarrow$ im Graph von f gibt es zu jedem $y \in S$ mindestens ein Paar, das y als zweite Komponente aufweist
 f bijektiv $\Leftrightarrow$ im Graph von f gibt es zu jedem $y \in S$ genau ein geordnetes Paar, das y als zweite Komponente aufweist

Aufgabe 106:

Lesen Sie jeweils am Pfeildiagramm ab, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

a) $A = \{2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5\}$
 $B = \{1, 4, 6, 9, 16, 20, 25\}$
 $f: A \rightarrow B$ mit $x \mapsto x^2$

b) $C = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$
 $g: C \rightarrow C$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$

c) $D = \{1, 2, 3, 4\}$
 $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 $h: D \rightarrow D$ mit $x \mapsto 3x$

d) $M = \{\frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}, \frac{7}{3}, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\}$
 $N = \{1, 2, 3\}$
 $k: M \rightarrow N$ mit $x \mapsto [x]$ ¹⁾

1) $[x]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner als x ist

Bei unendlichem Definitionsbereich ist es nicht mehr möglich, die Eigenschaften "injektiv" oder "surjektiv" einer Abbildung anhand des "Pfeildiagrammes" zu entscheiden.

Aufgabe 107:

Sind folgende Abbildungen injektiv oder surjektiv oder bijektiv?

Zeichnen Sie für jede Abbildung einen Ausschnitt aus dem Pfeildiagramm, sowie den Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem.

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2x$
- b) $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$
- c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$
- d) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$
- e) $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto |x|$
- f) $k: \mathbb{R} \rightarrow B, B = \{0,1\}$ mit $k(x) = 0$ für $x \in \mathbb{Q}$ und
 $k(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- g) $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $l(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und $l(0) = 2$ und
 $l(x) = x^2$ für $x < 0$
- h) $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x]$

Bijektive Abbildungen sind zur Definition der Gleichmächtigkeit (d.h. auch Gleichzähligkeit¹⁾) wichtig.

Definition 35

Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung von A nach B existiert.

- 1) Bei endlichen Mengen sagt man, zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen haben.

Beispiel 44:

Die Menge $\mathbb{G}$ der geraden Zahlen ist gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen. Zum Nachweis dient die Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{G}$ mit $n \mapsto 2n$, welche bijektiv ist. Also: $\mathbb{N} \text{ glm } \mathbb{G}$. Bedenken wir andererseits, daß $\mathbb{G}$ echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, so erscheint uns die Aussage $\mathbb{N} \text{ glm } \mathbb{G}$ paradox¹⁾. Die Verwunderung wird kleiner, wenn wir daran denken, daß $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge ist. Ebenso ist $\mathbb{G}$ eine unendliche Menge.

Aufgabe 108:

Nennen Sie unendliche Mengen!

Beispiele: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{U}$ (Menge der ungeraden Zahlen)

Aufgabe 109:

Stellen Sie an Ihren Beispielen fest, ob es sich um Mengen handelt, die gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ sind.

Definition 36 ²⁾

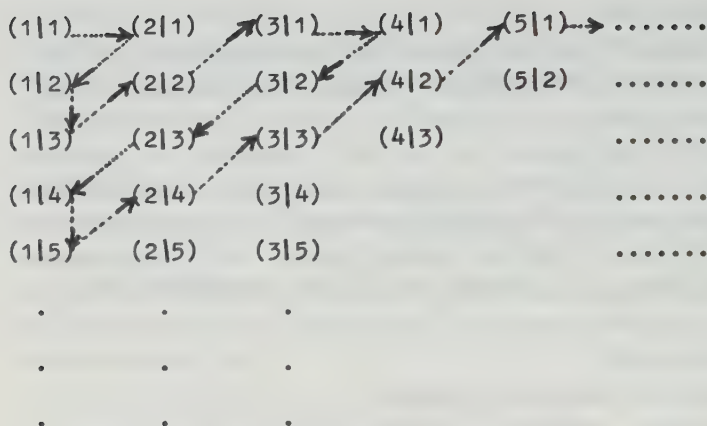
Eine Menge heißt abzählbar unendlich, wenn sie gleichmächtig $\mathbb{N}$ ist.

Kurz: A abzählbar unendlich : $\Leftrightarrow A \text{ glm } \mathbb{N}$

Beispiel 45:

Die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist bewiesen, wenn es uns gelingt, irgendeine bijektive Abbildung anzugeben, die $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abbildet. Welche Abbildung wir hierzu wählen, wird deutlich, wenn wir uns die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in einer besonderen Art aufgeschrieben denken:

- 1) Wählen Sie zum Kontrast z.B. die Menge $B = \{a, b, c, \dots x, y, z\}$. Diese ist zu keiner ihrer echten Teilmengen gleichmächtig.
- 2) Wir nennen hiernach eine Menge abzählbar, wenn sie entweder endlich oder abzählbar unendlich ist.



Die geordneten Paare sollen in der Reihenfolge "abgezählt" werden wie es die eingezeichneten Pfeile vorschreiben.

Auf ähnliche Weise stellt man fest, daß die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar unendlich ist. Dagegen kann man zeigen, daß die Menge $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Sie hat eine größere Mächtigkeit als $\mathbb{N}$. Den Beweis können Sie in Kamke, E.: Mengenlehre¹⁾ S. 12/13 nachlesen. Man sagt, $\mathbb{R}$ hat die Mächtigkeit c und nennt c auch die Mächtigkeit des Kontinuums.

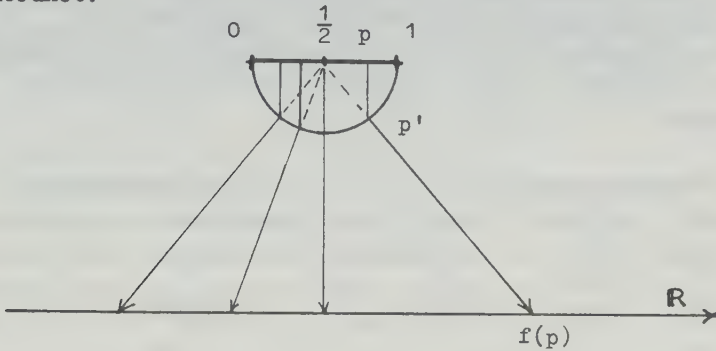
Wieder können wir eine paradox erscheinende Gleichmächtigkeit aufzeigen:

Beispiel 46:

Die Menge der Punkte eines offenen Intervalls aus $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig $\mathbb{R}$. Sei $I = (0;1)$, dann $I \text{ glm } \mathbb{R}$

1) Kamke, R.: Mengenlehre. Sammlung Götschen
Band 999/999a. Berlin 1965

Zum Beweis konstruiert man eine Abbildung, die jedem Punkt des Intervalls einen Punkt auf der Zahlengeraden zuordnet.



Man trage das Intervall $(0;1)$ auf einer Parallelen zur Zahlengeraden an. Man zeichne einen Halbkreis über der Strecke $(0;1)$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$. Das Lot von einem Punkt p der Strecke $(0;1)$ schneidet den Halbkreis im Punkt p' . Man verbinde den Mittelpunkt m des Halbkreises mit p' . Die Gerade durch m und p' schneidet die gegenüberliegende Gerade in $f(p)$, welcher das Bild von p bei der vorliegenden Abbildung f sei. Man kann zeigen, daß f das Intervall $(0;1)$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet. (Zu jedem Punkt der Strecke $(0;1)$ kann nur genau ein Punkt der Geraden konstruiert werden. Die Konstruktion kann auch umgekehrt werden.)

Beispiel 47:

Noch unerwarteter ist das Ergebnis, daß ein Intervall in $\mathbb{R}$ und ein Quadrat in $\mathbb{R}^2$ gleichmächtig sind, denn man würde erwarten, daß die Seite des Quadrats "weniger" Punkte enthält als das Quadrat. Sei $I = (0,1]$ (das halboffene Intervall) und $Q = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leq 1 \wedge 0 < x_2 \leq 1\}$
Behauptung: $I \text{ glm } Q$

Beweis:

Wir konstruieren eine bijektive Abbildung φ , die jedem Punkt aus I genau einen Punkt aus Q zuordnet.

Sei $x \in I$. Man stelle x in Kommaschreibweise im Dualsystem dar. Was man darunter versteht, wird im folgenden gezeigt:

im Dezimalsystem			im Dualsystem
0,25	$= \frac{1}{4}$	$= 2^{-2}$	$= 0,01$
0,125	$= \frac{1}{8}$	$= 2^{-3}$	$= 0,001$
0,0625	$= \frac{1}{16}$	$= 2^{-4}$	$= 0,0001$
0,3125	$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$	$= 2^{-2} + 2^{-4}$	$= 0,0101$
0,03125	$= \frac{1}{32}$	$= 2^{-5}$	$= 0,00001$
0,15625	$= \frac{1}{8} + \frac{1}{32}$	$= 2^{-3} + 2^{-5}$	$= 0,00101$
usw.			

Für unsere Zwecke wähle man aber nicht die abbrechenden Dualdarstellungen (wie in den Beispielen) sondern stattdessen die nicht-abbrechenden.

Statt 0,01 : 0,00111111...
 statt 0,0101 : 0,01001111...
 statt 0,011 : 0,01011111...

Wir ordnen nun diesen Dualzahlen je eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen zu:

0,001 011 00 11 01 1 0 1 1 1 $\mapsto$ 3,2,1,3,1,2,1,2,1,1,...
3 1 4 2 4 2 4 4

Die Folgenglieder geben jeweils die Anzahl der Stellen bis zur nächsten 1 an.

Diese Zuordnung ist eine bijektive Abbildung. Jedem $x \in I$ wird genau eine Folge natürlicher Zahlen zugeordnet und umgekehrt. (Der Leser prüfe dies selbst genau nach).

Aus einer Folge werden nun zwei Folgen:

3, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 1, ...

die Folge aus den a_j mit ungeraden Indizes und die Folge aus den a_j mit geraden Indizes. Jeder der beiden Folgen wird wieder ein Bruch in Dualschreibweise zugeordnet:

$$3, 1, 1, 1, 1, \dots \mapsto x_1 = 0,001111\dots$$

$$2, 3, 2, 2, 1, 1, \dots \mapsto x_2 = 0,010010101$$

Die beiden reellen Zahlen x_1 und x_2 wählen wir nun als Koordinaten eines Punktes in $\mathbb{R}^2$. Also: $(x_1|x_2) \in \mathbb{Q}$.

Aus der Konstruktion der Zuordnung $x \mapsto (x_1|x_2)$ wird ersichtlich, daß es sich dabei um eine bijektive Abbildung handelt. Damit ist bewiesen: $I \cong \mathbb{Q}$.

Aufgabe 110:

Für welche Punkte $x \in I$ sind die folgenden Punkte aus $\mathbb{Q}$ die Bilder bei der Abbildung φ :

$$\left(\frac{9}{64} \mid \frac{3}{4}\right); \quad \left(\frac{19}{128} \mid \frac{49}{64}\right)?$$

Aufgabe 111:

Geben Sie die Bilder $\varphi(x)$ für die Punkte $x \in I$ mit $x = 2^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) bei der Abbildung φ an.

2.5.2 Bild einer Topologie, Urbild einer Topologie

In Aufgabe 111 waren die Bilder aller Punkte einer Menge $A \subseteq I$ bei der Abbildung φ zu ermitteln. Es war $A = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Bilder der Punkte von A kann man zu einer Menge zusammenfassen:

$$\{\varphi(x) \mid x \in A\}$$

Diese Menge wollen wir mit $\varphi[A]$ abkürzen und sie das Bild von A bei der Abbildung φ nennen.

Definition 37

Gegeben eine Abbildung f von M nach S und eine Teilmenge A von M . Dann heißt

$f[A] := \{y \mid y = f(x) \wedge x \in A\}$ das Bild der Menge A bei der Abbildung f .

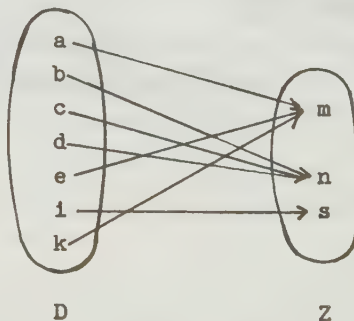
Beispiel 48:

Die Abbildung $f : D \rightarrow Z$ sei durch nebenstehendes Pfeilschema definiert.

$$A = \{a, b, c\},$$

$$B = \{c, d, e, i\} \text{ und}$$

$C = \{c, d\}$ seien Teilmengen von D .



Dann ist $f[A] = \{m, n\}$ $f[B] = \{m, n, s\}$ $f[C] = \{n\}$

Aus der Definition 37 ist unmittelbar ersichtlich:
Das Bild jeder Teilmenge von D ist Teilmenge von Z .

Die Erfahrung aus Beispiel 48 legt folgende Aussage nahe:

Satz 25

Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und $C \subseteq X$ und $B \subseteq X$, dann
gilt: wenn $C \subseteq B$, dann $f[C] \subseteq f[B]$

Beweis:

Zu zeigen: Für alle $y \in f[C]$ gilt: $y \in f[B]$

Sei $y \in f[C]$ beliebig $\Rightarrow \bigvee_{x \in C} y = f(x)$.

Da $C \subseteq B$ ist dieses x auch aus $B \Rightarrow f(x) \in f[B]$

$\Rightarrow y \in f[B]$

Weitere Eigenschaften der Bilder von Teilmengen der Definitionsmenge bei der Abbildung f sind:

Satz 26

(a) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

(b) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$

Beweis als Aufgabe 112

Satz 27

$f : X \rightarrow Y$ bijektive Abbildung $\Rightarrow$

$\Rightarrow f[A] \cap f[B] = f[A \cap B]$ für alle Teilmengen A
und B der Definitionsmenge X

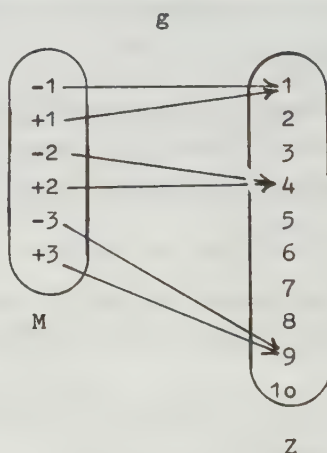
Beweis als Aufgabe 113.

Aufgabe 114:

- a) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an sowie Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$, so daß gilt:
 $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$
- b) Machen Sie sich am selben Beispiel nochmals klar, daß andererseits stets $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$

Aufgabe 115:

Die Abbildung $g : M \rightarrow Z$
 sei durch nebenstehendes
 Pfeildiagramm gegeben:



- a) Schreiben Sie einige Teilmengen von M auf und ermitteln deren Bilder bei der Abbildung g.
- b) Jeder Teilmenge A von M werde ihr Bild $g[A]$ bei der Abbildung g zugeordnet. Zeigen Sie, daß wir dadurch eine Abbildung von $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathcal{P}(Z)$ erhalten. Sie wird in Definition 38 die Bezeichnung "durch g auf $\mathcal{P}(M)$ induzierte Abbildung" erhalten.
- c) Ermitteln Sie die Bildmenge dieser induzierten Abbildung.

Definition 38

Durch eine Abbildung $g : M \rightarrow Z$ wird eine Abbildung von $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathcal{P}(Z)$ dadurch induziert, daß man jeder Teilmenge A von M ihr Bild $g[A]$ bei der Abbildung g zuordnet.

Die Bildmenge der induzierten Abbildung ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(Z)$. Wir kürzen die Bildmenge der induzierten Abbildung mit $g\mathcal{P}(M)$ ab.

Kurz: $g\mathcal{P}(M) := \{g[A] \mid A \in \mathcal{P}(M)\}$

Von $\mathcal{P}(M)$ wissen wir, daß sie eine Topologie auf M darstellt. Stellt auch $g\mathcal{P}(M)$ eine Topologie auf Z dar? Diese Frage können wir verallgemeinern. Jede Topologie $\mathcal{T}$ auf M ist eine Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$ (siehe Bemerkung auf S. 73). Wir können jeweils das Bild einer Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$ bei der induzierten Abbildung ermitteln. Ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ so wollen wir das Bild von $\mathcal{T}$ bei der induzierten Abbildung mit $g\mathcal{T}$ abkürzen. $g\mathcal{T}$ ist in jedem Fall Teilmenge von $\mathcal{P}(Z)$, nämlich:

$$g\mathcal{T} = \{g[T] \mid T \in \mathcal{T}\}$$

Wir wollen im folgenden untersuchen, ob das "Bild"¹⁾ der Topologie $\mathcal{T}$ von M wieder eine Topologie ist. Machen wir uns dies zunächst an Beispielen klar.

Aufgabe 116:

$(M, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum mit $M = \{a, b, c, d, e\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, M\}$

Geben Sie sich durch Pfeildiagramme Abbildungen vor (wobei Sie die Zielmenge entsprechend wählen) für die gilt:

1) Die Anführungszeichen sollen deutlich machen, daß es sich um eine abkürzende Sprechweise handelt.

- a) $f : M \rightarrow N$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
- b) $g : M \rightarrow P$ ist surjektiv, aber nicht injektiv
- c) $h : M \rightarrow S$ ist bijektiv.

Ermitteln Sie für jede der Abbildungen das "Bild" der Topologie $\mathcal{T}$. Ist $f\mathcal{T}$ eine Topologie von N , bzw. $g\mathcal{T}$ eine Topologie von P bzw. $h\mathcal{T}$ eine Topologie von S ?

Beispiel 49:

Die Abbildung $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Projektion in x_2 -Richtung. Als Basis der üblichen Topologie von $\mathbb{R}$ wählt man etwa die Menge $\mathcal{K}$ der offenen Kreisscheiben. Für jede offene Kreisscheibe K ist $p[K]$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$. Da die offenen Mengen in $\mathbb{R}$ Vereinigungen von offenen Kreisscheiben sind, haben ihre Bilder die Darstellung $f[K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \dots]$.¹⁾ Die Aussage des Satzes 26(a) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ kann auf unendlich viele Mengen erweitert werden und wir erhalten: das Bild einer offenen Menge in $\mathbb{R}$ bei der Abbildung p ist eine offene Menge in $\mathbb{R}$. Kurz:
 $f[0] = f[K_1] \cup f[K_2] \cup f[K_3] \cup \dots = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$ (Vereinigung von offenen Intervallen).

Mit Hilfe des Satzes 27 kann man zeigen, daß das "Bild" jeder Topologie $\mathcal{T}$ von D eine Topologie von Z ist, wenn f bijektiv ist. (Beweis als Aufgabe 117!)

Sei $(M, \mathcal{T})$ topologischer Raum. Wenn eine Abbildung $g : M \rightarrow Z$ nicht surjektiv ist, so kommt Z in $f\mathcal{T}$ nicht vor. Dann kann $f\mathcal{T}$ nicht Topologie von Z sein. Vergleiche Axiom (01)!

1) Wobei wir hier vereinfachend so tun, als handle es sich um abzählbar unendlich viele offene Kreisscheiben. Dies muß in Wahrheit nicht der Fall sein.

Die Tatsache, daß zwar $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ gilt, dagegen die Umkehrung $f[A] \cap f[B] \subseteq f[A \cap B]$ nicht allgemein, kann für manche Topologien τ ein Grund dafür sein, daß f^τ das Axiom (O3) nicht erfüllt.

Es gilt also nicht für jede Abbildung $f : A \rightarrow B$ und jede Topologie τ auf A , daß f^τ eine Topologie von B ist.

Deshalb weichen wir aus und führen zunächst eine neue Bezeichnung ein: Urbild einer Menge bei einer Abbildung. Auch wenn eine Abbildung nicht bijektiv ist, kann man nach den "Urbildern" einzelner oder mehrerer Punkte fragen.

Beispiel 50:

Im Pfeildiagramm der Aufgabe 115 hat $4 \in Z$ die Urbilder 2 und -2 aus M .

Man faßt die Urbilder eines Punktes y zu einer Menge mit der Bezeichnung $f^{-1}(y)$ zusammen.

Definition 39

Abbildung $f : M \rightarrow Z$ und $y \in Z$

$$f^{-1}(y) := \{x \mid x \in M \wedge f(x) = y\}$$

Diese Definition kann auch auf Punkte aus Z angewendet werden, in denen kein Pfeil endet. Dann ist $f^{-1}(z) = \emptyset$. Man sieht sofort, daß stets gilt:

Satz 28

$$f^{-1}(y) \subseteq M \quad \text{für alle } y \in Z$$

Beispiel 51:

Bei der Abbildung $f : M \rightarrow Z$ aus Aufgabe 115 erhalten wir folgende Mengen von Urbildern

$$f^{-1}(1) = \{-1, +1\}$$

$$f^{-1}(2) = \emptyset$$

$$f^{-1}(3) = \emptyset$$

$$f^{-1}(4) = \{-2, +2\}$$

Die Vereinigungsmenge $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(2) \cup f^{-1}(4)$
 $= \{-1, +1, -2, +2\}$ wollen wir mit $f^{-1}[\{1, 2, 4\}]$ abkürzen
und Urbild von $\{1, 2, 4\}$ bei der Abbildung f nennen.

Allgemein:

Definition 40

Sei $f : D \rightarrow Z$ eine Abbildung und $Y \subseteq Z$, dann soll folgende Menge mit **U r b i l d** der Menge Y bei der Abbildung f bezeichnet werden:

$$f^{-1}[Y] := \{x \mid x \in D \wedge f(x) \in Y\}$$

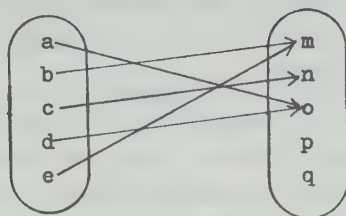
Für die hier eingeführte Schreibweise ist es klar, daß
 $f^{-1}(y) = f^{-1}[\{y\}]$ für ein $y \in Z$.

Beispiel 52:

Sei $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektionsabbildung in x_2 -Richtung und $I = (0; 1)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$.
Dann ist $f^{-1}[I] = \{(x_1 | x_2) \mid 0 < x_1 < 1 \wedge x_2 \in \mathbb{R}\}$.. Dies ist ein offener Parallelstreifen, der parallel zur x_2 -Achse ist.

Aufgabe 118:

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ sei durch das folgende Pfeildia-
gramm gegeben:



A

B

Bestimmen Sie $f^{-1}[m, o, p]$, $f^{-1}[n, o]$, $f^{-1}[p, q]$ und
 $f^{-1}[m, n, o, p]$.

Aufgabe 119:

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie
 $f^{-1}[I_k]$ wobei $I_1 = (0; 1)$, $I_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$

$I_3 = (0; -\frac{1}{2})$, $I_4 = (-1; +1)$ Intervalle aus der Zielmenge
 $\mathbb{R}$ seien.

Satz 29

Für Urbilder von Teilmengen der Zielmenge einer Ab-
bildung gelten allgemein folgende Gesetze (einzelne
Beweise als Aufgabe!)

- (a) $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$
- (b) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$
- (c) $f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]$
- (d) $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$

Ordnet man jeder Teilmenge B der Zielmenge einer Abbildung $f : M \longrightarrow Z$ ihr Urbild $f^{-1}[B]$ zu, so erhält man eine Abbildung von $\mathcal{P}(Z)$ nach $\mathcal{P}(M)$. Bedenkt man, daß jede Topologie auf Z eine Teilmenge von $\mathcal{P}(Z)$ ist, so wird klar, was man unter der abkürzenden Schreibweise "Urbild" einer Topologie $\mathcal{O}$ (auf der Zielmenge) verstehen will, nämlich die Menge

$$f^{-1}\mathcal{O} := \{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{O}\}$$

Für $f^{-1}\mathcal{O}$ gilt stets: $f^{-1}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(M)$. Was uns nun interessiert ist: Ist $f^{-1}\mathcal{O}$ eine Topologie auf M ? Dies ist insofern zu erwarten, als die Hindernisse, die es beim "Bild" einer Topologie dafür gab, daß die Axiome (01) bis (03) gelten, für das "Urbild" entfallen (siehe hierzu u.a. Satz 29!) Wenden wir uns zunächst der folgenden Aufgabe zu.

Aufgabe 120:

Erfinden Sie ein Beispiel, und machen Sie sich daran klar, daß $f^{-1}\mathcal{O}$ folgende Eigenschaften hat:

- (1) $\emptyset \in f^{-1}\mathcal{O}$
- (2) $M \in f^{-1}\mathcal{O}$
- (3) $A \in f^{-1}\mathcal{O} \wedge B \in f^{-1}\mathcal{O} \Rightarrow (A \cup B) \in f^{-1}\mathcal{O}$
- (4) $A \in f^{-1}\mathcal{O} \wedge B \in f^{-1}\mathcal{O} \Rightarrow (A \cap B) \in f^{-1}\mathcal{O}$

Überlegen Sie allgemeine Beweise zu (1), (2), (3) und (4).

Es erscheint nützlich, daß man von der Topologie der Zielmenge ausgehend auf der Definitionsmenge eine Topologie erhalten kann, nämlich $f^{-1}\mathcal{T}$ (wenn $\mathcal{T}$ die Topologie der Zielmenge ist).

Bei der Projektionsabbildung $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ ist diese induzierte Topologie eine Streifentopologie von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wie wir oben sahen, sind die

Urbilder der offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ offene Parallelstreifen parallel zur x_2 -Achse in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Diese stellen eine Basis der Topologie $p^{-1}\tau_{\mathbb{R}}$ dar (denn man kann die Aussage des Satzes 29(a) auf beliebig viele Mengen erweitern), $p^{-1}\tau_{\mathbb{R}}$ ist also eine Streifentopologie.

Bei obigen Überlegungen erscheint uns möglicherweise eines verwunderlich: Das Bild einer offenen Kreisscheibe bei der Abbildung p ist ein offenes Intervall. Das Urbild dieses offenen Intervalls ist aber nicht wieder die ursprüngliche Kreisscheibe, sondern ein offener Parallelstreifen, der allerdings die besagte Kreisscheibe enthält.

Es gilt allgemein:

Satz 30

Abbildung $f : X \longrightarrow Y$. Für beliebige $A \subseteq X$ und beliebige $B \subseteq Y$ gilt stets:

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]] \quad \text{und} \quad f[f^{-1}[B]] \subseteq B$$

Bei bijektiven Abbildungen gilt jeweils die Gleichheit.

Kontrolle der Gültigkeit dieser Aussagen an den in Aufgabe 116 gefundenen Abbildungen als Aufgabe 121.

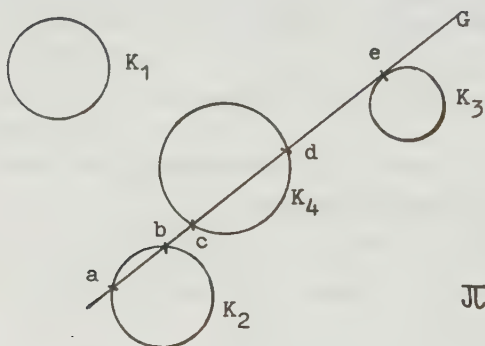
Es kann nun eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gefunden werden, so daß, wenn $\mathbb{R}$ mit der Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ ausgestattet ist, die auf $\mathbb{R}$ induzierte Topologie gerade $\tau_{\mathbb{R}}$ ist. Ebenso kann eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ angegeben werden, so daß von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ ausgehend auf $\mathbb{R}$ gerade die Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ induziert wird. Dies ist Thema von Beispiel 53, wobei dort $\mathbb{R}$ mit einer festen Geraden G identifiziert wird.

Beispiel 53:

Man betrachte die Inklusionsabbildung $i : G \rightarrow \mathbb{I}$ die jeden Geradenpunkt auf sich selbst abbildet. Die Zielmenge $\mathbb{I}$ habe die Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ (als Basis von $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ verwenden wir die Menge der offenen Kreisscheiben). Wir ermitteln die auf G induzierte Topologie.

$$i^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$$

Erweitert man Satz 29(a) auf beliebig viele Mengen, so kann damit gezeigt werden, daß die Menge der Urbilder von offenen Kreisscheiben in $\mathbb{I}$ eine Basis von $i^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ ist. Wie sehen die $i^{-1}[K]$ aus? (K offene Kreisscheibe)



$$i^{-1}[K_1] = \emptyset$$

$$i^{-1}[K_2] = (a, b) \quad (\text{offenes Intervall})$$

$$i^{-1}[K_3] = \emptyset$$

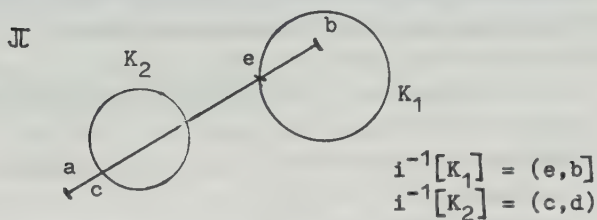
$$i^{-1}[K_4] = (c, d) \quad (\text{offenes Intervall})$$

$i^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ ist also die von den offenen Intervallen auf G erzeugte Topologie von G .

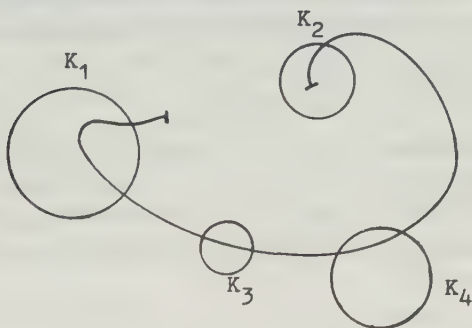
Wir sehen, daß wir rasch die $i^{-1}[T]$ für alle $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ bekommen, wenn wir $T \cap G$ bilden. $i^{-1}[T] = T \cap G$

Beispiel 54:

Auf diese Weise kann man auch auf einer Strecke
 $\overline{(a;b)} \subseteq \mathbb{J}$ ($a \in \mathbb{J}$, $b \in \mathbb{J}$) eine Topologie induzieren,



und genauso eine Topologie auf einem beliebigen Kurven-
 stück. (Beispiel 55)



2.5.3 Homöomorphismen

Bijektive Abbildungen dienen nicht nur zum Nachweis der Gleichmächtigkeit von Mengen. Sie spielen auch eine Rolle bei Untersuchungen zur **I s o m o r p h i e** (was man mit "Strukturgleichheit" übersetzen könnte).

Fragen: Wo ist Ihnen das Wort Isomorphie bereits begegnet?

Kennen Sie Beispiele von isomorphen Booleschen Verbänden?

Kennen Sie Isomorphismen bei algebraischen Strukturen (Gruppe, Ring, Körper)?

In Aufgabe 13 auf Seite 76 war nach allen möglichen Topologien auf einer Menge $M = \{a, b, c\}$ gefragt. Beim Aufstellen aller Topologien fiel es auf, daß "strukturgleiche" Topologien in der Sammlung vorkamen, z.B.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, M\} \\ \text{und} \quad \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, M\} \end{aligned}$$

Wir untersuchen dieses Beispiel genauer. Es gibt eine bijektive Abbildung von M nach M ($f: M \rightarrow M$) mit $f(a) = b$ und $f(b) = a$ und $f(c) = c$. Für diese Abbildung f bestimmen wir das "Bild" der Topologie der Definitionsmenge $f \mathcal{T}_1$:

$$f \mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, M\}$$

Wir entdecken:

$$f \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

Außerdem bestimmen wir das "Urbild" der Topologie der Zielmenge bei der Abbildung f :

$$f^{-1} \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, M\}$$

Wir entdecken:

$$f^{-1} \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$$

Man sieht, daß die bijektive Abbildung $f : M \rightarrow M$ eine bijektive Abbildung von $\mathcal{T}_1$ nach $\mathcal{T}_2$ induziert. Topologische Räume, die auf diese Weise als "isomorph" erkannt werden, nennt man homöomorph.¹⁾

Definition 41 in Kurzform

$(M, \mathcal{T}) \sim (R, \mathcal{O}) : \Leftrightarrow$ es eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow R$ gibt, für die gilt: $f\mathcal{T} = \mathcal{O}$ und $f^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{T}$

Definition 41

Zwei topologische Räume $(M, \mathcal{T})$ und $(R, \mathcal{O})$ heißen homöomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \rightarrow R$ gibt, für die das Bild jeder offenen Menge aus $\mathcal{T}$ offen in $\mathcal{O}$ ist und das Urbild jeder offenen Menge aus $\mathcal{O}$ offen in $\mathcal{T}$.

Homöomorphe topologische Räume heißen auch topologisch äquivalent. Abkürzung: $(M, \mathcal{T}) \sim (R, \mathcal{O})$

Beispiele 56 bis 58:

Man kann zeigen, daß folgende Räume topologisch äquivalent sind:

- 56) Zwei gleichmächtige Mengen, die beide mit der diskreten Topologie ausgestattet sind. Z.B. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ jeweils mit den diskreten Topologien. Denn durch eine bijektive Abbildung von M nach R wird eine bijektive Abbildung von $\mathcal{P}(M)$ nach $\mathcal{P}(R)$ induziert, wobei $A \mapsto f[A]$ zugeordnet ist.

1) Die Isomorphie heißt hier also Homöomorphie.

- 57) Zwei gleichmächtige Mengen, die beide mit der indis-kreten Topologie ausgestattet sind.
- 58) Wie wir oben sahen, kann man mit Hilfe der Inklusions-abbildung auf einer Strecke I (sei sie offen oder geschlossen) eine Topologie induzieren (siehe Bei-spiel 54, S. 198), die wir $\mathcal{T}_I$ nennen wollen. Dann sind $(I, \mathcal{T}_I)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ homöomorph. Sei z.B. I das offene Intervall $(0;1)$, dann:
 $(I, \mathcal{T}_I) \sim (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, denn $f(x) = \tan(\pi x - \frac{\pi}{2})$ ist eine bijektive Abbildung von I nach $\mathbb{R}$ und es gilt: $f \mathcal{T}_I = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und $f^{-1} \mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \mathcal{T}_I$ (siehe dazu die Aus-führungen auf Seite 183/84 über die Gleichmächtigkeit von $(0;1)$ und $\mathbb{R}$!)

Beispiel 59: (für nicht homöomorphe Räume)

Die Gleichmächtigkeit der Trägersmengen zweier topologi-scher Räume ist noch keine Gewähr dafür, daß diese homöo-morph sind. Dies zeigt sich an $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$. In Beispiel 47 (S. 184) hatten wir gezeigt, daß ein In-tervall I und ein Quadrat Q als Punktmengen gleichmäch-tig sind. Der Beweis kann erweitert werden zum Beweis der Aussage $\mathbb{R} \text{ glm } \mathbb{N}$. Aber $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathbb{N}})$ sind nicht homöomorph.¹⁾

Bezeichnung

Bijektive Abbildungen, die zur Feststellung der topolo-gischen Äquivalenz zweier topologischer Räume dienen, nennt man homöomorphe Abbildungen oder Homöomorphismen.

1) Dies sei hier ohne Beweis angegeben. Die Projektions-abbildung $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist als Homöomorphieabbil-dung unbrauchbar, da sie bereits nicht bijektiv ist. Die bijektive Abbildung, die für den Nachweis der Gleichmächtigkeit von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$ verwendet wird, in-duziert keine bijektive Abbildung von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ nach $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

Beispiel 60:

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax+b$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) ist ein Homöomorphismus.

Beispiel 61:

Die Abbildung $g(x) = x^2$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist kein Homöomorphismus von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ in sich. Zunächst ist g bereits nicht bijektiv (die Bildmenge von g ist eine echte Teilmenge der Zielmenge), außerdem ist auch das Bild mancher offenen Menge nicht offen in der Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ der Zielmenge $\mathbb{R}$. Das Bild des offenen Intervalls $(-1;+1)$ ist z.B. ein halboffenes Intervall: $g[(-1;+1)] = [0;1)$.

Aufgabe 122:

Zeigen Sie:

- a) Eine Geradenspiegelung
- b) eine Translation
- c) eine Drehung
- d) eine zentrische Streckung



ist ein Homöomorphismus von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ in sich.

Aufgabe 123:

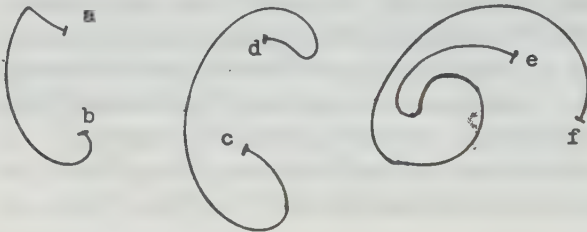
Zeigen Sie:

Wenn f ein Homöomorphismus von (M, τ) nach (R, σ) und g ein Homöomorphismus von (R, σ) nach (N, ϑ) ist, dann ist die Hintereinanderausführung der Abbildungen $g \circ f$ ein Homöomorphismus von (M, τ) nach (N, ϑ) ¹⁾

1) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Beispiel 62:

Mit Hilfe des Ergebnisses von Aufgabe 123 kann man die Homöomorphie (topologische Äquivalenz) von beliebigen doppelpunktfreien Kurvenstücken der Ebene (mit der induzierten Topologie) untereinander zeigen.



Da die Kurvenstücke unterschiedliche Länge haben können, leuchtet es ein, daß für Homöomorphismen im allgemeinen die Länge keine Invariante ist.¹⁾

Die Topologie befaßt sich mit den Invarianten bei homöomorphen Abbildungen (diese heißen auch topologische Abbildungen).

Wir fragen uns speziell, welche Eigenschaften von Teilmengen von $\mathbb{I}$ bleiben bei topologischen Abbildungen von $(\mathbb{I}, \tau_{\mathbb{I}})$ nach $(\mathbb{I}, \tau_{\mathbb{I}})$ erhalten. Am Beispiel obiger Kurvenstücke erkennt man, daß die Eigenschaften "geschlossen" bzw. "nicht geschlossen" erhalten bleiben. Die Eigenschaft "zusammenhängend"²⁾ bleibt ebenfalls erhalten.

- 1) Aus dem Geometrieunterricht wissen Sie, daß für die sogenannten Kongruenzabbildungen (z.B. Spiegelung, Drehung, Translation) Länge, Flächeninhalt und Winkelgröße u.a. Invarianten sind.
- 2) Ein Raum (M, τ) heißt zusammenhängend, wenn M nicht als Vereinigung zweier disjunkter, offener, nicht leerer Mengen dargestellt werden kann.

Topologische Abbildungen haben durch oben erwähnte Invarianzen auch praktische Bedeutung. Abbildungen von U-Bahn-Netzen auf Fahrscheinen kann man als topologisch äquivalent zu den wirklichen Streckenführungen ansehen.



Die Entfernungen zwischen den Haltepunkten sind nicht maßstabsgetreu übertragen. Die Form des Netzes wird meist dem rechteckigen Format des Fahrscheins angepaßt. Das Bild ist also keineswegs ein ähnliches¹⁾ Abbild des realen Streckennetzes, sondern ist durch eine topologische Abbildung entstanden.

Eine unterhaltsame Anwendung der Homöomorphismen:
Man fasse die Großbuchstaben des Alphabets in einer vorher vereinbarten Darstellung als Teilräume von $(\mathbb{I}, \tau_{\mathbb{I}})$

1) Erinnern Sie sich an die Ähnlichkeitsabbildungen!

auf. Dann sind einige untereinander homöomorph (topologisch äquivalent).

V I C U G

sind untereinander topologisch äquivalent.

O D sind zueinander topologisch äquivalent, aber nicht zu den obigen usw.

Aufgabe 124:

Finden Sie weitere zum Buchstaben C topologisch äquivalente Buchstaben des Alphabets!

Unter allen Abbildungen von einem topologischen Raum nach einem anderen sind die Homöomorphismen, wie wir oben sahen, eine spezielle Klasse. Sie sind bijektiv und sie induzieren eine bijektive Abbildung von $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{O}$ ($\mathcal{T}$ Topologie der Startmenge, $\mathcal{O}$ Topologie der Zielmenge).

2.5.4 Stetige Abbildungen

Viele Abbildungen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ in sich sind keine Homöomorphismen. Als Beispiele seien die Zuordnungsvorschriften $f(x) = x^2$ und $k(x) = c$ genannt. Diese sind aber als s t e t i g e Abbildungen bekannt. Frage: Hat diese Eigenschaft auch etwas mit den Topologien der Start- und Zielmenge zu tun?

Beispiel 63:

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$
 Dann ist $f: \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und auch $f: \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ denn:
 z.B. für $(-1; +1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist $f[(-1; +1)] = [0; +1)$;
 also $f[(-1; +1)] \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

Aber es gilt

$$\boxed{f^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}} \quad , \text{ denn für alle offenen}$$

Mengen aus $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist das Urbild bei der Abbildung f wieder eine offene Menge in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

Beispiel 64:

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$
 Dann ist $k: \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ denn:
 z.B. für $(-1; +1) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ist $k[(-1; +1)] = \{c\}$ und $\{c\}$
 ist eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$; somit
 $k[(-1; +1)] \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$

Aber es gilt

$$\boxed{k^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}} \quad , \text{ denn}$$

für $T \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ gilt $k^{-1}[T] = \begin{cases} \emptyset & \text{wenn } c \notin T \\ \mathbb{R} & \text{wenn } c \in T \end{cases}$

Beides sind offene Mengen in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

Wir heben davon eine Stetigkeitsdefinition ab, von der wir zunächst an Beispielen untersuchen werden, ob sie mit der bisher benutzten übereinstimmt. Ein Beweis der Äquivalenz folgt später.

Definition 42

$(M, \mathcal{T})$ und $(R, \mathcal{O})$ seien topologische Räume. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow R$ heißt stetig, wenn das Urbild jeder in $\mathcal{O}$ offenen Menge offen in $\mathcal{T}$ ist.

Definition 42 in Kurzform

$$f \text{ stetig} \iff \bigwedge_{S \in \mathcal{O}} f^{-1}[S] \in \mathcal{T}$$

noch kürzer:

$$f \text{ stetig} \iff f^{-1}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$$

Untersuchen wir zunächst einige Abbildungen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ in sich, die wir bereits als stetige¹⁾ kennen, ob sie auch nach obiger Definition stetig zu nennen sind. Dabei genügt es jeweils, die Urbilder der offenen Mengen der Basis $\mathcal{B} (\subseteq \mathcal{O})$ der Topologie zu bestimmen. Hat man gezeigt, daß $f^{-1}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, so folgt daraus unter Anwendung einer Erweiterung von Satz 29(a) S.194 $f^{-1}\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$, denn danach ist $f^{-1}\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie $f^{-1}\mathcal{O}$.

1) Nach der "alten" Definition:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\iff f$ ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig

f in x_0 stetig $\iff \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} f[U_\delta(x_0)] \subseteq U_\varepsilon(f(x_0))$
 $U_\varepsilon(f(x_0))$, die ε -Umgebung von $f(x_0)$, ist das Intervall $\{y \mid d(y, f(x_0)) < \varepsilon\}_{\mathbb{R}} = \{y \mid |y - f(x_0)| < \varepsilon\}_{\mathbb{R}}$

Aufgabe 125:

Zeigen Sie, daß $h^{-1}\mathcal{Y}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}$ für folgende Abbildungen

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch ihre Zuordnungsvorschrift gegeben sind

a) $x \mapsto ax+b$ ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$)

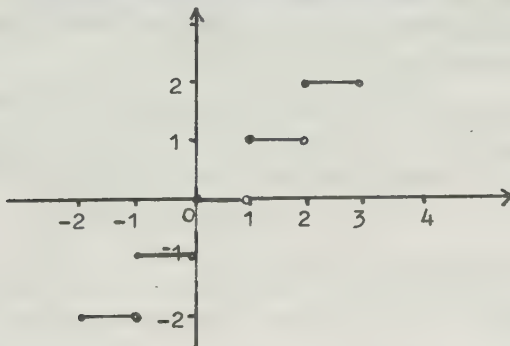
b) $x \mapsto x^3$ c) $x \mapsto e^x$

Hinweis: Nehmen Sie die kartesische Darstellung des Graphen der Abbildung zuhilfe!

Obige Beispiele, die wir aus dem Analysisunterricht als stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ kennen, erweisen sich nach Definition 42 als stetig. Es interessiert ebenso, ob Funktionen - wie Treppenfunktionen - nach Definition 42 unstetig sind, da wir die Treppenfunktionen aus dem Analysisunterricht als unstetig kennen.

Beispiel 65:

Die Treppenfunktion $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x]$ ist auch nach Definition 42 keine stetige Abbildung von $(\mathbb{R}, \mathcal{Y}_{\mathbb{R}})$ in sich.



Für $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}) \in \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}$ ist $t^{-1}[(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})] = [1; 2)$ und somit $t^{-1}[(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})] \notin \mathcal{Y}_{\mathbb{R}}$. Damit ist gezeigt, daß die Treppenfunktion t unstetig ist.

Daß diese Übereinstimmung der Bezeichnungen "stetig" nicht Zufall ist, soll bewiesen werden. Dazu ist es nötig, die "alte" Definition für "stetig in einem Punkt" in der Sprache der Topologie einzuführen.

Definition 43

Sei Abbildung $f : M \longrightarrow R$, wobei $(M, \mathcal{T})$ und $(R, \mathcal{S})$ topologische Räume sind. f heißt im Punkt $x_0 \in M$ stetig, wenn es zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt, deren Bild ganz in V liegt ($f[U] \subseteq V$).

Verwendet man, daß in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ die ε -Umgebungen eines Punktes eine Umgebungsbasis zum Umgebungssystem desselben Punktes darstellen, dann kann für den Fall $M = R = \mathbb{R}$ die Äquivalenz der Definition 43 mit der altbekannten ε - δ -Definition der Stetigkeit (siehe Fußnote S. 207) rasch gezeigt werden. Man kann nun aus Definition 43 zunächst weiter folgern:

Satz 31

Abbildung f stetig im Punkt $x_0 \in M \iff f^{-1}[V] \in \mathcal{U}_{x_0}$
für alle $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$

Aufgabe 126:

Geben Sie die Aussage des Satzes 31 sowohl in ausführlicher Sprechweise als auch in noch kürzerer Form wieder.

Beweis:

1. Beweisrichtung

Sei $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}_{x_0}$ für alle $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$. Sei $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$, dann wähle man für das in der Definition erforderliche $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ gerade $f^{-1}[V]$.

Da allgemein $f[f^{-1}[V]] \subseteq V$ gilt (siehe Satz 30, S. 196) ist somit für obiges $U = f^{-1}[V]$: $f[U] \subseteq V$.
Damit ist nach Definition 44 die Abbildung f im Punkt x_0 stetig.

2. Beweisrichtung

Sei f nach Definition 44 stetig und sei $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$

$$\Rightarrow \bigvee_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} f[U] \subseteq V$$

Da nach Satz 29(d), S. 194 allgemein gilt:

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B] \\ \text{folgt:} \quad f^{-1}[f[U]] \subseteq f^{-1}[V] \\ \text{Nach Satz 30 gilt:} \quad U \subseteq f^{-1}[f[U]] \end{array} \right\} \Rightarrow U \subseteq f^{-1}[V]$$

Da $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ folgt daraus aber aufgrund der auf S. 109 aufgeführten allgemeinen Eigenschaften eines Umgebungssystems $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}_{x_0}$.

Die "neue"(globale) Stetigkeitsdefinition hängt mit der "alten" (lokalen) Stetigkeitsdefinition wie folgt zusammen:

Satz 32

$(M, \mathcal{T})$ und $(R, \mathcal{O})$ seien topologische Räume. Eine Abbildung $f: M \rightarrow R$ ist stetig, wenn sie in jedem Punkt $x \in M$ stetig ist.

Beweis:

1. Beweisrichtung

Sei f nach Def.42 stetig und $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$. Aus der Definition der Umgebungen folgt, es gibt ein $0 \in \mathcal{O}$ mit $f(x) \in 0$ und $0 \subseteq V$. Dann ist $x \in f^{-1}[0]$ und (nach Satz 29(d)) $f^{-1}[0] \subseteq f^{-1}[V]$. Laut Definition 42 ist $f^{-1}[0] \in \mathcal{T}$. Damit ist gezeigt, daß $f^{-1}[V]$ eine Umgebung von x ist, kurz: $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}_x$. Also ist f nach Satz 31 an der Stelle x stetig. Da $x \in M$ beliebig angenommen war, ist f für alle $x \in M$ in x stetig.

2. Beweisrichtung

Sei f nach Def.43 in x stetig für alle $x \in M$ und sei $0 \in \mathcal{O}$ dann ist nach Satz 6 (S. 112) $0 \in \mathcal{U}_{f(x)}$ für alle $f(x) \in 0$; daraus folgt nach Satz 31: $f^{-1}[0] \in \mathcal{U}_x$ für alle $x \in f^{-1}[0]$. Damit ist ausgesagt, $f^{-1}[0]$ ist Umgebung jedes ihrer Punkte, dies ist aber das Kennzeichen für offene Mengen (vgl. Satz 7, S. 112)
 $\Rightarrow f^{-1}[0] \in \mathcal{T}$

Wir haben durch obige Sätze und Beweise gesehen, daß lokale und globale Stetigkeitsdefinition voll in Einklang miteinander sind. Gleichzeitig haben wir die Stetigkeitsdefinition auf alle topologischen Räume erweitert, während wir sie früher nur für Abbildungen von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ formuliert hatten.

Aufgabe 127:

$(M, \mathcal{T})$ mit $M = \{a, b, c\}$ und $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, M\}$,
 $(R, \mathcal{O})$ mit $R = \{m, n, o, p\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{m, n\}, \{m, n, o\}, R\}$;
Sei $f: M \rightarrow R$ mit $f(a) = o$; $f(b) = n$; $f(c) = n$;
Ist die Abbildung f stetig?

Aufgabe 128:

Zeigen Sie: Seien $(M, \mathcal{T})$ und $(R, \mathcal{O})$ topologische Räume.

Ist $\mathcal{O} = \{\emptyset, R\}$, die indiskrete Topologie, dann ist

jede Abbildung von M nach R stetig.

Hilfe: Machen Sie sich die Behauptung zunächst an einem konkreten Beispiel klar, etwa an den topologischen Räumen der Aufgabe 77 (S. 151) oder Beispiel 20 (S. 110).

Aufgabe 129:

Zeigen Sie: Seien $(M, \mathcal{T})$ und $(R, \mathcal{O})$ topologische Räume.

Ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(M)$, die diskrete Topologie, dann ist jede

Abbildung von M nach R stetig.

Die Aufgaben 128 und 129 zeigen, daß die Stetigkeit einer Abbildung ganz abhängig ist von den Topologien, mit denen die Definitionsmenge und die Zielmenge ausgestattet sind. Dies zeigen auch die folgenden Beispiele.

Beispiel 66:

$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Projektionsabbildung in x_2 -Richtung.

Ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ausgestattet und

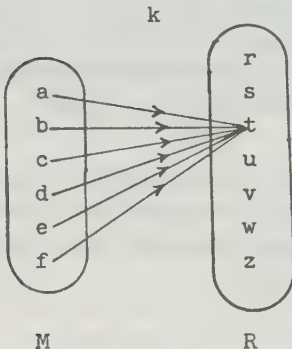
$\mathbb{R}$ mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, so ist die Abbildung p stetig. Die Urbilder der offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ (diese bilden bekanntlich eine Basis von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) sind offene Streifen parallel zur Projektionsrichtung, also offene Mengen in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$.

Beispiel 67:

$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist aber keine stetige Abbildung, wenn $\mathbb{R}$ mit einer "Streifentopologie" $\mathcal{O}$ ausgestattet ist, deren offene Parallelstreifen nicht die Richtung der Projektion haben. Die Urbilder der offenen Intervalle aus $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ sind wieder offene Streifen, die sich aber nicht aus den Streifen in $\mathcal{O}$ erzeugen lassen, weil sie nicht dieselbe Richtung haben.

Aufgabe 130:

Die Abbildung $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (die sog. konstante Abbildung) ist wie wir wissen, stetig. Dabei ist $\mathbb{R}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ausgestattet. Konstante Abbildungen gibt es auch zwischen beliebigen topologischen Räumen.



Sei $k: M \rightarrow R$ die durch nebenstehendes Pfeildia-
gramm gegebene Abbildung.
Zeigen Sie, daß die Abbil-
dungen $k: M \rightarrow R$ für be-
liebige topologische Räume
stetig sind.
Hilfe: Wählen Sie zu ange-
gebenem R eine nichttrivia-
le Topologie $\mathcal{T}$ und er-
mitteln Sie $k^{-1}\mathcal{T}$!

Insbesondere ist auch die Abbildung f von $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ stetig, obwohl die kartesische Darstel-
lung des Graphs von f aus isolierten Punkten besteht.

Bemerkung

Aus der Definition der globalen Stetigkeit sieht man, daß die topologischen Abbildungen stets auch stetige Abbil-
dungen sind.

Satz 33

Topologische Abbildungen sind spezielle stetige
Abbildungen, nämlich solche, die bijektiv sind und
eine stetige Umkehrabbildung haben.

(Beweis als Übung)

Aufgabe 131:

Machen Sie sich obige Aussage nochmals an der topologischen Abbildung $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ klar. (s sei eine Achsen-spiegelung, $\mathbb{R}$ sei als Definitions- wie als Zielmenge mit der Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ ausgestattet).

Bei obiger Kennzeichnung topologischer Abbildungen ist der Passus "und eine stetige Umkehrabbildung haben" wichtig. Dies wird an folgendem Beispiel einer bijektiven, stetigen Abbildung sichtbar, die keine stetige Umkehrabbildung hat und von der wir von früher wissen, daß sie keine topologische Abbildung ist.

Beispiel 68:

$i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei die identische Abbildung. Die Topologie der Definitionsmenge sei $\tau_{\mathbb{R}}$, Topologie der Zielmenge sei eine Streifentopologie $\mathcal{O}$. Wir stellten bereits fest, daß die Abbildung i stetig ist, da die Urbilder von offenen Streifen wieder offene Streifen sind, welche offen in $\tau_{\mathbb{R}}$ sind. i ist trivialerweise bijektiv. Die Umkehrabbildung i^{-1} ist nicht stetig. Für i^{-1} ist $\mathcal{O}$ Topologie der Definitionsmenge und $\tau_{\mathbb{R}}$ Topologie der Zielmenge. Wir fragen somit nach den Urbildern der offenen Mengen aus $\tau_{\mathbb{R}}$ bei der Abbildung i^{-1} . Die Urbilder offener Kreisscheiben bei dieser Abbildung sind offene Kreisscheiben, welche jedoch in $\mathcal{O}$ nicht offen sind, somit $(i^{-1})^{-1}\tau_{\mathbb{R}} \not\subset \mathcal{O}$. i^{-1} ist also nicht stetig.

Beispiel 69:

Für die sogenannte Peano-Abbildung von I nach $Q = I \times I$ mit $I = (0;1)$ (siehe S. 184), kann man zeigen, daß sie eine stetige Abbildung ist, aber keine stetige Umkehrung

hat. Der Beweis sei hier nicht angegeben.¹⁾

Für die Stetigkeit von Abbildungen eines allgemeinen topologischen Raumes nach einem anderen gelten viele Aussagen, die wir früher für stetige Abbildungen kennengelernt haben. Wir wollen diese hier nicht alle nochmals beweisen. Nur eine Aussage soll allgemein bewiesen werden, da sich hier die globale Stetigkeitsdefinition als besonders handlich erweist, nämlich die Aussage über die Stetigkeit der Abbildung, die man durch Hintereinanderschaltung zweier stetiger Abbildungen erhält.
(Beweis als Aufgabe!)

Aufgabe 132:

Seien $f: M \rightarrow R$ und $g: R \rightarrow N$ Abbildungen und $(M, \mathcal{T})$, $(R, \mathcal{O})$ und $(N, \mathcal{O})$ topologische Räume. Wenn f und g stetige Abbildungen sind, dann ist auch $g \circ f$ eine stetige Abbildung von $(M, \mathcal{T})$ nach $(N, \mathcal{O})$.

Die in der Aufgabe 132 enthaltene Aussage gibt uns ein Mittel in die Hand, aus dem Wissen über die Stetigkeit einiger Abbildungen die Stetigkeit anderer Abbildungen zu folgern. Bei Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) hatte sich dies als nützlich erwiesen. Gehen Sie zu Aufgabe 125 und dem Beispiel 63 zurück und stellen Sie zusammen, welche Abbildungen dann außer den angegebenen noch stetig sind. Auf diese Weise kann man auch eine stetige Abbildung von $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ erhalten. (Überlegung als Übung!)

1) Weitere Einzelheiten und Literaturhinweise lese man nach in: Grundzüge der Mathematik, Band II B, Göttingen 1968

Bemerkung

G l o b a l unstetige Abbildungen können für einen
oder mehrere Punkte ihres Definitionsbereiches
l o k a l stetig sein.

Geben Sie hierfür ein Beispiel an! (Aufgabe 133)

2.5.5 Konvergenz und Stetigkeit

Bei der Untersuchung einer Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ auf lokale Stetigkeit hin bedienen wir uns früher meist folgenden Kriteriums:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt x_0 , wenn für jede Folge $\langle x_n \rangle$, die gegen x_0 konvergiert, gilt: die Folge $\langle f(x_n) \rangle$ konvergiert gegen $f(x_0)$.

Gilt diese Aussage auch für allgemeine topologische Räume? Hier ist Vorsicht geboten, zwar gilt:

Satz 34

Wenn eine Abbildung f von $(M, \mathcal{T})$ nach $(R, \mathcal{O})$ im Punkt x_0 stetig ist, so ist sie auch konvergenz-erhaltend.¹⁾

Beweis mit Hilfe des Satzes 31 (S. 211) und der Definition 21 (S. 129) als Aufgabe 134.

Dagegen gilt die Umkehrung des Satzes 34 nicht allgemein:

Beispiel 70:

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, wobei $\mathcal{T}$ neben $\emptyset$ und $\mathbb{R}$ alle Komplemente von abzählbaren Teilmengen enthält. Im Beispiel 33 (Seite 141) haben wir gezeigt, daß eine Folge in diesem topologischen Raum nur dann

1) Konvergenz-erhaltend soll bedeuten:
wenn $\langle x_n \rangle$ gegen $x_0 \in M$ konvergiert, dann konvergiert $\langle f(x_n) \rangle$ gegen $f(x_0)$ in R .

konvergiert, wenn sie bis auf endlich viele Folgenglieder konstant ist. Sei die Zieltopologie $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ und i die identische Abbildung.

Jede Folge, die in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ gegen x_0 konvergiert, hat die Form $a_1, a_2, \dots, a_m, x_0, \dots, x_0, \dots$ (siehe S. 141). Die Folge der $i(a_n)$ sieht dann jeweils genauso aus und konvergiert ebenfalls gegen $x_0 = i(x_0)$. Die Abbildung i ist jedoch nicht stetig, da z.B. das Urbild von $I = (0;1)$ in der Topologie τ nicht offen ist (da nicht Komplement einer abzählbaren Teilmenge von $\mathbb{R}$). Die Abbildung i ist auch nicht lokal im Punkt x_0 stetig (Man wende Satz 31 Seite 209 an. Als Umgebung von $i(x_0) = x_0$ in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ wähle man z.B. $K = \{x | d(x_0, x) < \epsilon\}_{\mathbb{R}}$. Das Urbild von K bei der Abbildung i enthält keine in τ offene Menge, ist also in $(\mathbb{R}, \tau)$ nicht Umgebung von x_0).

Aus der Eigenschaft konvergenzerhaltend zu sein, folgt für eine Abbildung von (M, τ) nach (R, τ') also nicht immer, daß sie stetig ist. Die Aussage auf S. 217 oben, die als Stetigkeitskriterium für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ dient, kann somit nicht auf Abbildungen beliebiger topologischer Räume übertragen werden, dies zeigt obiges Gegenbeispiel.

Wenn auch der Begriff Grenzwert einer Folge hier nicht zu einer hinreichenden und notwendigen Bedingung für Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen verwendet werden kann, so kann es doch der Begriff Häufungspunkt einer Menge. Für Funktionen in $\mathbb{R}$ hatte die Aussage Bedeutung, daß eine stetige Funktion ein abgeschlossenes Intervall auf ein abgeschlossenes Intervall abbildet. Dies war wichtig für den sogenannten Zwischenwertsatz. Da abgeschlossene Intervalle jeweils die abgeschlossene Hülle zu offenen Intervallen sind, untersuchen wir das Verhalten der abgeschlossenen Hüllen bei stetigen Abbildungen näher. Am Beispiel der Projektionsabbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ (mit den natürlichen Topologien)

sammeln wir folgende Erfahrungen:

$A \subseteq \mathbb{I}$	①		②	
	$\bar{A} \text{ in } \mathcal{T}_{\mathbb{I}}$	$p(\bar{A})$	$p(A)$	$\overline{p(A)} \text{ in } \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$
$K(z, \xi)$				
S_1 (offener Parallelstr. in x_1 -Richtung)				
S_2 (offener Parallelstr. in x_2 -Richtung)				
R (Rechteck)				

Der folgende Satz wird durch diese Aufstellung plausibler:

Satz 35

Eine Abbildung f von $(M, \mathcal{T})$ nach $(R, \mathcal{O})$ ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen A von M gilt: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ ¹⁾

Aufgabe 135:

Die identische Abbildung von $(\mathbb{I}, \mathcal{O})$ nach $(\mathbb{I}, \mathcal{T}_{\mathbb{I}})$ ist nicht stetig (siehe Beispiel 68, S. 214). Finden Sie eine Teilmenge A von $\mathbb{I}$, für die gilt: $i(\bar{A}) \not\subseteq \overline{i(A)}$

1) Man beachte, daß die Querstriche zweierlei Bedeutungen haben, einmal die Hüllenbildung in $(M, \mathcal{T})$, das andere Mal die in $(R, \mathcal{O})$.

Bevor wir an den Beweis von Satz 35 gehen, machen wir uns klar, weshalb tatsächlich das Teilmengenzeichen in der Bedingung $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ stehen muß und nicht das Gleichheitszeichen wie wir es nach der Erstellung obiger Rubrik annehmen würden.

Beispiel 71:

Dazu wählen wir die identische Abbildung i von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ nach $\mathbb{R}$ mit der indiskreten Topologie $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. In Aufgabe 128 (S. 212) hatten wir gezeigt, daß diese Abbildung stetig ist. Als $A \subseteq \mathbb{R}$ wählen wir $K(z, \varepsilon)$, dann ist $i(\bar{K}) = \bar{K}$ aber $\overline{i(K)}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$, die K enthält, und das ist $\mathbb{R}$. Es gilt hier also: $i(\bar{K}) \subsetneq \overline{i(K)}$ (echte Teilmenge).

Beweis zu Satz 35:

Eine einfache Folgerung aus Definition 42 für die Stetigkeit ist: Abbildung f von (M, τ) nach (R, δ) ist stetig $\Leftrightarrow$ das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in (R, δ) ist abgeschlossen in (M, τ) .

Mit Hilfe dieser Variante der Stetigkeitsdefinition gestaltet sich der Beweis einfach:

1. Beweisrichtung

Sei f stetig. Aus den Eigenschaften der Hüllenbildung weiß man, daß stets gilt: $f[A] \subseteq \overline{f[A]}$

Nach Satz 29(d) folgt dann

$$\left. \begin{array}{l} f^{-1}[f[A]] \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}] \\ \text{Außerdem gilt nach Satz 30} \\ A \subseteq f^{-1}[f[A]] \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq f^{-1}[\overline{f[A]}] (*)$$

Da $\overline{f[A]}$ eine abgeschlossene Menge in (R, δ) ist, folgt aufgrund der Stetigkeit, daß $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ abgeschlossen in τ ist. Somit ist $f^{-1}[\overline{f[A]}]$ eine abgeschlossene Obermenge von A (siehe (*))

Dann muß sie aber die Hülle von A enthalten, da $\bar{A}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von A ist. Es gilt

also: $\bar{A} \subseteq f^{-1}[f[\bar{A}]]$

Nun gilt wiederum nach Satz 25 (S. 188)

$f[\bar{A}] \subseteq f[f^{-1}[f[\bar{A}]]]$. Dies bedeutet nach Satz 30 (S. 196):

$$f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$$

2. Beweisrichtung

Es gelte (*) $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[A]}$ für alle Teilmengen A von M.
Sei F eine beliebige abgeschlossene Menge in $(R, \mathcal{O})$.
Wenn wir zeigen könnten $f^{-1}[F]$ ist abgeschlossen, so
hätte sich f nach obiger Folgerung aus Definition 42
als stetig erwiesen.

Wir setzen $A = f^{-1}[F]$. Ist A abgeschlossen in $(M, \mathcal{T})$?

Nach Satz 14 (S. 154) gilt: A abgeschlossen $\Leftrightarrow \bar{A} = A$.

Letzteres können wir zeigen.

Wegen (*) $f[\bar{A}] \subseteq \overline{f[f^{-1}[F]]}$ (1)

Nach Satz 30: $f[f^{-1}[F]] \subseteq F$

Daraus nach Satz 17: $\overline{f[f^{-1}[F]]} \subseteq \bar{F}$ (2)

Da F abgeschlossen ist, gilt nach Satz 14: $\bar{F} = F$ (3)

Aus (1), (2), (3) zusammen folgt $f[\bar{A}] \subseteq F$

Wiederum Satz 29(d) angewandt, ergibt

$$f^{-1}[f[\bar{A}]] \subseteq f^{-1}[F]$$

Nach Satz 30 gilt: $\bar{A} \subseteq f^{-1}[f[\bar{A}]]$ und für $f^{-1}[F]$ setzen wir wieder A. Dann folgt $\bar{A} \subseteq A$. Da andererseits stets $A \subseteq \bar{A}$ gilt, folgt die Gleichheit $\bar{A} = A$, somit ist A abgeschlossen und die Stetigkeit von f belegt.

2.6 Nachwort

Für weitere Studien wird auf folgende Bücher verwiesen:

- 1) Arnold, B.: Elementare Topologie. Göttingen 1964
- 2) Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Braunschweig 1972
- 3) Grotemeyer, K.: Topologie. B.I.-Hochschulschriften 836/836a, Mannheim 1969
- 4) Lipschutz, S.: Theory and Problems of General Topology. Schaum's Outline Series, New York 1965
- 5) Franz, W.: Topologie I. Sammlung Götschen Band 1181, Berlin 1965
- 6) Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysisunterrichts. Göttingen 1970
- 7) Kelley, J.L.: General Topology. New York 1955

Erinnern Sie sich?

Womit beschäftigt sich die Topologie?

Welche Bedeutung hat die topologische Struktur für die reellen Zahlen?

Dient die Topologie der angewandten Mathematik?

Muß man, um in einem Raum topologische Fragen stellen und beantworten zu können, in diesem unbedingt eine Metrik zur Verfügung haben?

3 Das Lehrerhandbuch zum Lehrgang

=====

3.1 Zu: 2.1 Axiomatische Grundlegung

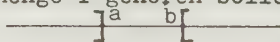
Hat man sich für das Axiomensystem, das mit dem Begriff "offene Mengen" arbeitet, entschieden und zudem für den induktiven Weg der Einführung der Axiome, so bleibt die Wahl der Mittel für diesen induktiven Weg. Der hier eingeschlagene Weg stellt folgendes Prinzip in den Mittelpunkt. An drei verschiedenen topologischen Räumen, die dem Schüler aus seinem bisherigen Mathematikunterricht wohl bekannt sind - wenn auch nicht unter dem Namen topologischer Raum - werden die in den Axiomen (O1) bis (O3) festgehaltenen Eigenschaften offener Mengen nach und nach in natürlicher Weise "entdeckt". Während dieses Vorgangs oder rückblickend nach der "Entdeckung" wird festgestellt, daß sich in allen drei Räumen jeweils die gleichen Eigenschaften auffinden lassen. Hinsichtlich der Eigenschaften ihrer offenen Mengen haben die drei verschiedenen Räume also die gleiche Struktur. Es liegt dann folgerichtig nahe, allen Räumen mit diesen Struktureigenschaften einen gemeinsamen Namen zu geben, also die drei Räume hinsichtlich dieser Eigenschaften unter einen gemeinsamen Oberbegriff zu stellen. Der Oberbegriff ist "topologischer Raum".

Das oben angeführte Entdecken der drei Eigenschaften der offenen Mengen sollte ein "gelenktes Entdecken" sein, wie es in 1.4.2 geschildert wurde. Da der Schüler mit den drei zu untersuchenden Räumen aus dem zurückliegenden Mathematikunterricht sehr vertraut ist, besteht andernfalls die Gefahr, daß er die Eigenschaften, deren "Entdeckung" beabsichtigt ist, nicht als auffallend bemerkt. Dies ist erklärlich, da er diese Räume früher unter anderem Aspekt betrachtete.

3.1.1 Zu: 2.1.1 Vorbereitende Fragen und Aufgaben

Zentraler Begriff des ersten Kapitels ist der Begriff "offene Menge". Die Bezeichnung "offenes Intervall" ist dem Schüler bereits geläufig. Somit liegt es nahe, an diese Kenntnis anzuknüpfen, wenn man offene Mengen einführen will. Da offene Intervalle offene Mengen in $\mathbb{R}$ - also in einem der drei zu untersuchenden Räume - sind, wird man unmittelbar auf die mengentheoretische Schreibweise der Intervalle Wert legen. Hierzu ist besondere methodische Sorgfalt nötig. Man darf vor allem die tatsächlich bei den Schülern vorhandenen Fähigkeiten im Umgang mit den Grundbegriffen der Mengenlehre nicht überschätzen. Diese Erfahrung machte ich auch im Kurs I. Im Kurs II zog ich daraus bereits die Lehre, wie im folgenden detailliert geschildert, vorzugehen.¹⁾

Eine Gerade wird gezeichnet. Sie soll als Punktmenge aufgefaßt werden. Ihre Identifikation mit der Menge $\mathbb{R}$ wird besprochen. In diesem Zusammenhang sind die Schüler gewöhnt, die Gerade als die "Zahlengerade" zu bezeichnen. Ein Schüler soll nun an der Tafel ein offenes Intervall seiner Wahl als Punktmenge farblich abstechend einzeichnen und dieses außerdem in Mengenschreibweise wiedergeben. Dabei erlebte ich, daß nur die beiden Randpunkte des Intervalls markiert wurden und das offene Intervall in der Kurzschreibweise $(a;b)$ angegeben wurde. Nach entsprechender Aufforderung wurde die entsprechende Punktmenge auf der Geraden richtig eingezeichnet. Im Kurs I wurde durch Ausklammern hervorgehoben, daß die Randpunkte nicht zur Menge I gehören sollen.



Als Mengenschreibweise wurde jedoch in beiden Kursen nur die Ungleichung $a < x < b$ angegeben. Der Mengenbildungsoperator war anscheinend nicht mehr geläufig. Das

1) Für den Fall des Selbststudiums wolle man von meinen Ausführungen auf S. 54 ausgehen.

veranlaßte mich, im Skriptum den Mengenbildungsoperator $\{x \mid E(x)\}$ ¹⁾ gleichzeitig mit der Frage vorzugeben, so daß der Lernende nur die Ungleichung als charakterisierende Eigenschaft einzusetzen hat.

Hat man so die Schreibweise für ein offenes Intervall wiederholt, so ist es noch nötig, die Abgrenzung dieser Schreibweise gegen die des halboffenen und des abgeschlossenen Intervalls zu wiederholen. Damit prägt sich auch zusätzlich der Gebrauch des Mengenbildungsoperators wieder besser ein. Die vorkommenden Ungleichungen werden von allen Schülern sicher beherrscht. Im Anschluß daran werden die Unterschiede zwischen diesen drei Arten von Intervallen auch mündlich betont. Dabei wird auf den Gebrauch des Worts Randpunkt abgezielt. Dies ist als Vorarbeit für eines der nächsten Ziele wichtig, nämlich offene Kreisscheiben in der euklidischen Ebene, zu beschreiben. Die anschauliche Beschreibung offener Kreisscheiben steht in Analogie zu der der offenen Intervalle.

Es böte sich nun die Gelegenheit, gleich hier anschließend offene Mengen der Ebene zu betrachten und danach offene Mengen des dreidimensionalen Raumes und erst hiernach in jedem der drei topologischen Räume die Eigenschaften (01) bis (03) jeweils für die einzelnen Räume zu untersuchen. Ein Auffinden immer neuer offener Mengen wird dem Schüler jedoch wenig sinnvoll erscheinen, wenn zunächst mit den offenen Mengen nichts anderes getan wird als sie sozusagen "vorzustellen". Deshalb entschloß ich mich, gleich nach Einführung der offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ die Frage zu stellen, ist der Durchschnitt zweier offener

1) $E(x)$ steht für "x hat die Eigenschaft E". Im Skriptum wird anstelle von $E(x)$ eine Leerstelle verwendet.

Intervalle in $\mathbb{R}$ wieder ein Intervall? Aus methodischen Gründen wird die Frage spezialisiert. Man fragt: Ist der Durchschnitt des oben erarbeiteten Intervalls mit einem beliebigen anderen Intervall wieder ein Intervall? Diese Festlegung des einen an der Durchschnittsbildung beteiligten Intervalles bringt für den Schüler mehr Übersichtlichkeit in die Fallunterscheidungen, die er zur korrekten Beantwortung der Frage anzustellen hat. Würde dagegen auch das zweite an der Durchschnittsbildung beteiligte Intervall vorgegeben, so hätte der Schüler wiederum allzu wenig Gelegenheit zu eigenständigem schöpferischem Denken. Mit der gewählten Form der Fragestellung erreicht man, daß der Schüler zu Fallunterscheidungen gezwungen wird. Selbst eine zunächst falsche Antwort auf die Frage bringt für den Lehrgang einen Gewinn mit sich. Beantwortet nämlich der Schüler unter stillschweigender Voraussetzung eines bestimmten Intervalls die Frage unmittelbar mit Ja bzw. Nein, so kann diese Antwort durch geeignete Wahl eines Intervalls als Partner der Durchschnittsbildung sofort als falsch ausgewiesen werden. Der Schüler lernt dadurch beachten, daß in Sätzen eine Allaussage stecken kann, ohne daß die sprachliche Form dies unmittelbar widerspiegelt. Da All- und Existenzaussagen im folgenden Lehrgang eine große Rolle spielen, ist diese Erkenntnis äußerst wichtig. Bei der Auffindung der zu unterscheidenden Fälle kann man durchaus zulassen, daß von den Schülern zunächst sozusagen zu viele Fälle unterschieden werden, wovon später einige zusammengefaßt werden können.

Es wird oft genug der Fall sein, daß bei Bearbeitung der Fragen 3 und 4 des ersten Kapitels die Mengenverknüpfungen Durchschnitt und Vereinigung erst nochmals definiert werden müssen, obwohl sie lt. Lehrplan von Schülern dieses Alters bereits beherrscht werden müßten (siehe Kapitel "Vorkenntnisse"). Die Fragen 3 und 4 und auch schon Frage 1 stellen also unbemerkt einen Test dar, welche Kenntnisse in der Mengenlehre bei den Schülern

vorausgesetzt werden können. Lücken, die dabei zutage treten, müssen schnell geschlossen werden, am besten indem man die Grundbegriffe der Mengenlehre an weiteren konkreten Beispielen wiederholt. Vergleiche hierzu die Ausführungen auf Seite 43/44.

Aus Gründen der Zweckmäßigkeit verwende ich für die Kennzeichnung von Punkten kleine Buchstaben, von Punktmengen Groß-Buchstaben. Daran müssen sich die Schüler erst gewöhnen, da sie im Unterricht der Elementargeometrie stets für Punkte Groß-Buchstaben verwendet haben. Das Umgewöhnen macht jedoch nach meiner Erfahrung keine größeren Schwierigkeiten. Von der Mengenschreibweise her sind die Schüler daran gewöhnt, für die Bezeichnung von Mengen Groß-Buchstaben und für die Bezeichnung der Elemente der Mengen Klein-Buchstaben zu verwenden. Treten reelle Zahlen in der Bedeutung von Maßzahlen und nicht von Punkten auf, so verwende ich griechische Buchstaben. Bei der Beschreibung der Kreisscheibe verwendet man günstigerweise die schon vielfach im Geometrieunterricht gebrauchte Schreibweise $K(z, \varrho)$. z sei der Punkt, der das Zentrum der Kreisscheibe darstellen soll, ϱ der Radius der Kreisscheibe.

Für den Prozeß des g e l e n k t e n Entdeckens ist es nun wichtig, bereits die übernächste Station auf dem Wege im Auge zu haben. Es ist die Definition 1. Zwar gibt es - wie sich im Verlauf des Kapitels 2.1.1 zeigt - für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3$ analoge Definitionen, die induktive Hinführung auf Definition 1 (für $\mathbb{R}^2$) ist jedoch die zwangloseste. Deshalb ist es also das nächste Ziel, in $\mathbb{J}$ Mengen zu sammeln, die als Analogon zu den offenen Intervallen in $\mathbb{R}$ angesehen werden können. Dies sind die offenen Kreisscheiben, auf die möglichst straff hingeführt werden soll-

te. Das verbale Beschreiben einer offenen Kreisscheibe macht - so meine Erfahrung - keine Schwierigkeiten. Um Pannen auszuweichen, kann erst die Mengenschreibweise einer Kreisscheibe (ohne daß das Adjektiv "offen" davorgesetzt wird) verlangt werden, wodurch automatisch die Rede auf die Randpunkte kommt. Kennen die Schüler die Schreibweise $\{x \mid d(x,z) < \varrho\}_{\pi}$ aus ihrem bisherigen Unterricht nur unter der Bezeichnung "Inneres einer Kreisscheibe", so wird ihnen die Bezeichnung "offene Kreisscheibe" einfach mitgeteilt und als zweidimensionales Analogon des offenen Intervalls plausibel gemacht.

Von größerer Freiheit des Entdeckungsprozesses möchte ich abraten, um zu den offenen Kreisscheiben zu kommen. In dieser Phase des induktiven Weges kommt es mir auf die verbale Beschreibung der offenen Kreisscheiben (und danach auch der offenen Quadrate, Rechtecke usw.) an, wobei die Rolle der Randpunkte wichtig ist.

In der Beschreibung der Punktmenge $K(z, \varrho)$ wird nicht zur Komponentenschreibweise der Punkte übergegangen. Für spätere Zwecke wäre dies hinderlich. Den Schülern, die bereits in Vektorrechnung ausgebildet sind, fällt die Bearbeitung der Frage 5 besonders leicht. Sie haben möglicherweise eine sehr ähnliche Schreibweise bereits bei der Beschreibung einer Kreislinie $K = \{ \vec{x} \mid |\vec{x} - \vec{z}| = \varrho \}$ in der Vektorrechnung verwendet. Um zur Kreisscheibe $K(z, \varrho)$ zu kommen, ändert man nur zwei Einzelteile der Schreibweise der Kreislinie. Man bezeichnet die Punkte nun nicht mehr als Ortsvektoren, also bleiben die Pfeile über den Klein-Buchstaben weg - statt $\vec{x}$ erscheint x - und an Stelle des Gleichheitszeichens tritt das Kleinerzeichen. Den Abstand zwischen den Punkten x und z kann man zunächst in Worten anschreiben, bevor man die

Abkürzung $d(x,z)$ dafür einführt.

$$K(z, \mathfrak{S}) = \{x \mid \text{Abstand von } z \text{ nach } x \text{ ist kleiner } \mathfrak{S}\} = \{x \mid d(x,z) < \mathfrak{S}\}$$

Einige Schüler wollen $d(x,z)$ - wie sie es von der Vektorrechnung her gewöhnt sind - durch $\sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2}$ ersetzen. Es wird jedoch nützlich sein, schon hier zur Schreibweise $d(x,z)$ überzugehen, gerade weil es in späteren Beispielen nicht mehr auf die arithmetische Bestimmung der Distanz ankommen soll. Die Schreibweise $d(x,z)$ ist für die später nötige Verallgemeinerung der Kreisscheiben günstig.

Beim Gespräch über "offene Kreisscheiben", "offene Rechtecke" usw. ist es ratsam, als gemeinsame Ausgangsbasis eine zeichnerische Darstellung dieser Mengen zu haben. Man könnte sich z.B. darauf einigen, alle zur Punktmenge gehörenden Punkte auf weißem Untergrund grün einzuzichnen. Dabei taucht das Problem auf - Frage 8 der Einführung provoziert dies absichtlich - daß die abgeschlossene Kreisscheibe und die offene des gleichen Radius völlig gleich aussehen würden. Das "Weglassen" der Randpunkte ist mit den oben beschriebenen Mitteln nicht darstellbar. In Anlehnung an Papy¹⁾ bediene ich mich im Schülerbuch deshalb der symbolischen Darstellung mittels zweier Farben. Alle zur Punktmenge gehörenden Punkte werden z.B. grün eingezeichnet. Randpunkte oder einzelne innere Punkte, die als nicht zur Punktmenge gehörend gekennzeichnet werden sollen, zeichnet man z.B. rot ein. Papy nennt diese Übereinkunft der symbolischen Darstellung der offenen Mengen die Rot-Grün-Übereinkunft. Man könnte den Einwand bringen, daß eine solche symbolische Darstellung nicht altersgemäß sei, also nur für jüngere Schüler angebracht;

1) Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysis-Unterrichts. Göttingen 1970

in meinen Versuchsklassen bestätigte sich jedoch das Gegenteil. Für Tafelzeichnungen ist die Darstellung wohl etwas umständlich, jedoch beim Arbeiten mit dem Overhead-Projektor unter Verwendung vorbereiteter Folien bewährt sie sich. Freilich ist sie ohnehin nur für die Einführungsphase von praktischer Bedeutung, bis die Axiome erarbeitet sind.

Nützlich ist ebenfalls die Verwendung der Abkürzung $K(z, \mathfrak{g})$ für die offene Kreisscheibe mit Zentrum z und Radius $\mathfrak{g} > 0$, $\mathfrak{g} \in \mathbb{R}$. Es werden dabei unmittelbar die Bestimmungsstücke einer jeden Kreisscheibe mit in die Symbolik hineingenommen. Eine kleine Abwandlung der Symbolik, nämlich ein Querstrich über dem K , soll dann die abgeschlossene Kreisscheibe bezeichnen. Dieser Gebrauch paßt sich dann auch der Symbolik für die abgeschlossene Hülle einer Punktmenge an.

In diesem Zusammenhang halte ich es für erwähnenswert, daß es in Kurs II eine Teilnehmerin gab, der der Sprachgebrauch "Radius $\mathfrak{g}$ der offenen Kreisscheibe" Verständnisschwierigkeiten machte. Sie hatte beim Begriff Radius die intuitive Vorstellung von etwas genau Abgezirkeltem, also von einem "berandeten Gebilde". Somit war sie der Meinung, man dürfe den Ausdruck "Radius einer offenen Kreisscheibe" gar nicht gebrauchen, da hier ja kein "berandetes Gebilde" vorliegt. Hier kann das Erinnern an die Schreibweise für offene Intervalle Abhilfe schaffen, wo ja auch die Randpunkte in die Schreibweise eingehen, obwohl sie nicht zur Punktmenge gehören. Sind dadurch die Zweifel noch nicht behoben, könnte man auffordern, eine bessere Ausdrucksweise zu finden. Dies tat ich auch. Die Schüler erkannten dann die vorliegende Schreibweise als die überzeugendste. Außer bei dieser einen Schüle-

rin traten jedoch keine Verständnisschwierigkeiten auf.

Weitere offene Punktmengen der Ebene z.B. offene Rechtecke oder offene Dreiecke werden von den Schülern vorgeschlagen. Es gelingt auch bei einigen die Wiedergabe in Mengenschreibweise, etwa beim offenen Rechteck. Andere vorgeschlagene offene Mengen können nur anschaulich (mittels Zeichnung) beschrieben werden. Es ist nun nötig, ein Kriterium zu ermitteln, das es gestattet, mit mathematischen Mitteln und nicht mit Hilfe der Anschauung, herauszufinden, ob eine gegebene Punktmenge der Ebene offen ist.

Das zu findende Kriterium ist nicht so naheliegend, daß es nicht besonderer methodischer Sorgfalt bedarf. Die sogenannten "Elementarkreisscheiben" zu finden, die zu obigem Zweck gebraucht werden, wird dem Schüler ohne Hilfe schwerfallen. Trotzdem soll dem Schüler die Definition nicht einfach fertig vorgelegt werden. Es wird vielmehr das Problem aufgeworfen: "In der Beschreibung offener Mengen der Ebene sollen die Worte Rand oder Randpunkt nicht verwendet werden". Eine weitere Anleitung und zusätzlich eine symbolhafte bildliche Darstellung sollen helfen, das Kriterium aufzufinden. Als Einleitung ist es sogar möglich, von einem festen Punkt einer offenen Menge in $\mathbb{J}$ ausgehend zu fragen, ob sein Bildpunkt bei einer Translation von beliebiger Richtung und geeignetem Betrag auch ein Punkt der offenen Menge ist - weniger exakt ausgedrückt: wenn ich von dem besagten Punkt der offenen Menge aus etwas nach einer beliebigen Richtung "wegrücken" würde, bliebe ich dann innerhalb der offenen Menge. Dies kann sogar anhand eines im Koordinatensystem festgelegten offenen Quadrats (z.B.) und eines ebenfalls durch seine Komponenten gegebenen inneren Punktes dieses Quadrats rechnerisch genau beantwortet werden. Da die Ausdrucksweise von den Bild-

punkten, die bei Translationen des festen Punktes x entstehen, unhandlich ist, wird nach Ersatz gesucht. Alle diese Bildpunkte bilden, wenn die Beträge der Translationen kleiner als ein Betrag ε angenommen werden, eine Punktmenge, die man mit $\{y \mid d(y,x) < \varepsilon\}$ beschreiben kann, also kurz $K(x,\varepsilon)$, also eine offene Kreisscheibe. Somit kann die Antwort auf obiges Problem wie folgt formuliert werden: Außer dem Punkt x der offenen Menge gehören alle Punkte der offenen Kreisscheibe $K(x,\varepsilon)$ offenen Menge.

Nun muß noch herausgearbeitet werden, daß dies bei geeignetem Radius ε für jeden Punkt unserer bisher bekannten offenen Mengen in $\mathbb{R}$ gilt. Dies wird sehr deutlich, wenn als Kontrast die Frage für einen Randpunkt einer abgeschlossenen Menge gestellt wird. Hier wird ersichtlich, daß jede noch so klein gewählte Kreisscheibe, die als Zentrum einen Randpunkt hat, Punkte enthalten muß, die nicht zur abgeschlossenen Menge gehören. Schüler sprechen hierbei oft sehr anschaulich von "herausragen". Daran wird angeknüpft und gefragt, ob es auch in offenen Mengen Punkte gibt, die hinsichtlich dieser Eigenschaft den Randpunkten gleich sind. Ist einmal klar geworden, daß hier die Antwort nein lauten muß, dann ist die Definition offener Mengen in $\mathbb{R}$ mit Hilfe sogenannter Elementarkreisscheiben inhaltlich gewonnen. Gemeinsam kann dann die Formulierung der Definition 1 gewonnen und ausgefeilt werden.

Wird man sich bei der ersten Formulierung vielleicht damit begnügen zu sagen "..., wenn es zu jedem Punkt p aus M eine Kreisscheibe $K(p,\varepsilon)$ gibt, die ganz in M liegt", so verbessert man, indem man die Existenz des Bestimmungsstückes "Radius ε " fordert. In der im Schülerbuch aufgeschriebenen Definition würde eigentlich noch ein Passus " ε reelle Zahl" oder "eine Zahl ε " oder

" $\S \in \mathbb{R}$ " fehlen, man nimmt aber stillschweigend an, daß dies in der Bedingung $\S > 0$ enthalten ist.

Dem in 1.4.2 geschilderten methodischen Prinzip folgend werden dem Schüler unmittelbar im Anschluß an die Formulierung der Definition 1 Aufgaben vorgelegt (S.58), die er mit Hilfe der Definition lösen soll. Aufgaben 1 und 2 dienen diesem Zweck. Dabei wird zur Erleichterung in Aufgabe 1 nicht verlangt, die in der Definition 1 enthaltene Allaussage zu beachten, weil das Kriterium nur auf einzelne Punkte der vorgegebenen Menge anzuwenden ist. In Aufgabe 2 wird die Fragestellung aus Aufgabe 1 auf alle Punkte der jeweiligen Punktmenge ausgedehnt. Die Schüler der Versuchsklassen beschäftigten sich gern mit diesen beiden Aufgaben. Die bildliche Vorgabe des Problems wird dazu beigetragen haben. In Aufgabe 2 lernt der Schüler "nicht offen" als Alternative zu "offen" kennen. Hier kann auch schon der Ausdruck "abgeschlossene Menge" an Beispielen erklärt werden und herausgestellt werden, daß bei den Punktmengen "nicht offen" nicht gleichbedeutend mit "abgeschlossen" ist.

In Aufgabe 3 sollen zunächst für einen Spezialfall die für topologische Räume charakteristischen Eigenschaften untersucht werden. Und zwar also nicht schon die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen aus $\mathcal{T}$, sondern zunächst die Vereinigung zweier offener Kreisscheiben. Die Durchschnittsbildung soll ebenfalls an zwei offenen Kreisscheiben ausgeführt werden. Dies ist eine beabsichtigte Vereinfachung der Fragestellung. Der Schüler kann bei der Beantwortung, falls er zwei bestimmte zahlenmäßig vorgegebene Kreisscheiben nimmt, die Radien der zu suchenden Elementarkreisscheiben sogar rechnerisch bestimmen. Dies stellt für viele Schüler auch in der Oberstufe eine unerläßliche Hilfe dar. Es sollte allerdings versucht werden, auch bei weniger begabten Schülern

den Gebrauch der Variablen bei diesen Beweisen zu erreichen. Als Vorstufe kann ohne weiteres eine Zeichnung angefertigt und die rechnerische Bewältigung des Problems versucht werden.

Als Hilfe für den allgemeinen Beweis wird die Definition 1 nochmals in Kurzform unter Verwendung der logischen Zeichen vorgegeben. Wenn allerdings bei den Schülern durch Gebrauch in anderen Mathematikkursen die logische Formalsprache bereits gut geläufig ist, kann diese Kurzform auch selbsttätig von den Schülern erstellt werden. Die Schüler aus Kurs I waren darin sehr geschickt und machten solche Aufgaben deshalb sehr gern. Für das Auffinden der Beweis-idee ist jedoch schließlich der Inhalt der Definition wichtiger als ihre formale Gestaltung.

Die Anwendung der Definition 1 auf die leere Menge könnte den Schülern zunächst Schwierigkeiten bereiten. Deshalb wurde die Begründung, weshalb " $\emptyset$ ist nach Definition 1 offen" gilt, in den Text aufgenommen und nicht wie in den Erprobungskursen als Aufgabe gestellt. Die angegebene Begründung dient dann für die Bearbeitung der Aufgaben 7a und 8b als Muster, weshalb diese dann keine Schwierigkeiten mehr bereiten dürften.

Durch die Bearbeitung der Aufgaben 4 und 5 wird die Sammlung von offenen Mengen in $\mathfrak{T}$, die der Schüler kennt, bereichert. Dies wird sich später als nützlich erweisen (siehe z.B. der offene Streifen). Die Erkenntnis, daß eine einpunktige Menge keine offene Menge in $\mathfrak{T}$ ist, wird für die an späterer Stelle folgende Untersuchung des Durchschnitts unendlich vieler offener Kreisscheiben gebraucht werden.

Die Einführung der offenen Mengen des dritten zu untersuchenden topologischen Raumes, des 3-dimensionalen euklidischen Raumes, geschieht nach demselben methodischen Konzept wie die Einführung der offenen Mengen

der Ebene. Deshalb kann hier unter Umständen etwas rascher vorgegangen werden. Die Beschreibung der Punktmenge "Kugeloberfläche" ist den Schülern möglicherweise aus der Vektorrechnung bekannt. Die Punktmenge der inneren Punkte einer Kugel zu beschreiben, dürfte deshalb nicht schwer fallen. Nun wird es auch nicht mehr nötig sein, zeichnerische Darstellungen zur Unterstützung des Verständnisses zu bieten. Als nicht kugelförmige offene Mengen spielen der offene Würfel oder der offene Quader eine Rolle, da sie vom Schüler noch gut räumlich vorstellbar sind. Am offenen Würfel wird dann das Kriterium für offene Mengen des 3-dimensionalen Raumes gesucht. Hier sind Abschätzungen für die Radien der sogenannten Elementarkugeln noch gut durchführbar.

Durch Demonstration, daß es zu einem Randpunkt ("Oberflächenpunkt") eines abgeschlossenen Würfels als Zentrum keine Elementarkugel gibt, die nicht aus dem Würfel "herausragen" würde, soll erkannt werden, daß dies andererseits für jeden (inneren) Punkt eines offenen Würfels der Fall ist. Diese Erkenntnis wird dazu benützt, beliebige offene Mengen des 3-dimensionalen Raumes zu erklären. Wir erhalten Definition 2.

In der darauf folgenden Aufgabe 6 soll - diesmal verkürzt - der Beweis geführt werden, daß der Durchschnitt und die Vereinigung zweier offener Kugeln jeweils gemäß Definition 2 offene Mengen des 3-dimensionalen Raumes sind.

Das Vorgehen, für j e d e n der drei bisher untersuchten Räume eine eigene Definition seiner offenen Mengen zu bringen, wirkt möglicherweise auf den ersten Blick umständlich. Spätestens bei der Beschäftigung mit Aufgabe 4 erkennt man die Bedeutung der drei gesonderten Definitionen, wenn nämlich klar wird, daß ein offenes Intervall oder eine Gerade in einem 1-dimensionalen Raum offene Mengen sind, aber nicht offene Mengen

der Ebene. Ebenso zeigt Aufgabe 7, daß offene Kreisscheiben der Ebene im 3-dimensionalen Raum keine offenen Mengen sind.

Hätten wir nicht die Absicht, bereits hier mit der Gewöhnung an abstrakte Räume zu beginnen - dazu werden "Kugeln" in höherdimensionalen (höher als 3) Räumen betrachtet - so könnte zur Einführung der Schreibweise $\{x \mid d(x,z) < \varrho\}$ für ein Intervall in $\mathbb{R}$ ein einfacher Weg beschritten werden. Man könnte in diesem Fall die Aufgabe stellen, die zu Beginn des Kurses gefundene Mengenschreibweise eines Intervalls in $\mathbb{R}$ von den beiden Bestimmungsstücken Anfangs- und Endpunkt zu befreien und dafür die beiden anderen Bestimmungsstücke Mittelpunkt und Länge des Intervalls einzubauen. Dies wäre für die Schüler eine leichte Aufgabe. Da im vorliegenden Lehrgang unmittelbar auf die Verallgemeinerung des Begriffs Kugel gezielt wird, wählte ich ein anderes Vorgehen. Es wird herausgearbeitet, daß die Schreibweise $\{x \mid d(x,z) < \varrho\}$ jeweils eine andere Menge beschreibt, je nachdem welche Grundmenge vorgelegt sei. Diese Erfahrung wird an den Grundmengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{J}$ und $\mathcal{E}$ (dreidimensionaler Raum) gesammelt. Die Schüler greifen von selbst gern den Gedanken auf, dieses "Spiel" für 4-dimensionale Räume oder 5-dimensionale usw. fortzusetzen. Der Schritt zur 4-dimensionalen "Kugel" ist getan. Damit ist der Begriff "Kugel" verallgemeinert und gleichzeitig die Grundlage für das Verständnis allgemeiner metrischer Räume gelegt. Gleichzeitig ist die Ablösung des Begriffs Raum vom Anschaulichen eingeleitet. Daneben läßt sich nun die Analogie der Definition offener Mengen in $\mathbb{J}$ mit Hilfe von "Elementarkreisen" und der Definition offener Mengen in euklidischen Räumen anderer Dimension mit Hilfe von "Kugeln" einsehen. Die Definitionen 2 und 3 erscheinen sinnvoll.

Nachträglich leuchtet ein, warum wir die Erfahrungen zu den Axiomen (01) bis (03) in den dreierlei Räumen nicht in der Reihenfolge $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ und zuletzt $\mathbb{G}$ sammeln ließen. Ohne Kriterien, die nicht nur an die bloße Anschauung gebunden sind, wäre die Untersuchung des Durchschnitts und der Vereinigung offener Mengen in den drei Räumen wertlos, weil an die Anschauung gebunden. Diese Kriterien sind für jeden Raum gesondert in den Definitionen 1 bis 3 niedergelegt. Für Definition 1 (das Kriterium für offene Mengen in $\mathbb{I}$) an erster Stelle sprechen methodische Gesichtspunkte. Es ist die von den drei Definitionen, die dem Schüler am leichtesten zugänglich ist.

Um Definition 3 in der Anwendung zu erproben, folgt Aufgabe 8, in der verschiedene Mengen aus $\mathbb{R}$ daraufhin untersucht werden sollen, ob sie offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind. Besonders bemerkenswert ist dabei die offene Menge $(3; \infty)$. Ähnlich gebaute offene Mengen in $\mathbb{R}$ würden Schüler wohl auf die Aufforderung: "Gib Beispiele für offene Mengen in $\mathbb{R}$!" hin kaum spontan nennen.

Aufgabe 10 verlangt nun im Gegensatz zu den inhaltlich verwandten Aufgaben 3 und 6 nicht die Untersuchung der Vereinigung zweier offener Intervalle oder des Durchschnitts zweier offener Intervalle daraufhin, ob sie wieder offen sind, sondern steuert den Beweis der allgemeineren Aussage an: "Die Vereinigung zweier offener Mengen aus $\mathbb{R}$ ist wieder eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ". Der Hinweis stützt die dabei nötigen Gedankengänge stark ab. Allgemeine Beweise dieser Art sind auch für Oberstufenschüler noch eine schwierige Aufgabe. Diese Erfahrung habe ich besonders im Kurs I gemacht, bei dem ich die helfenden Hinweise nicht vorher gegeben hatte.

Auch Schüler, die in den bisherigen Mathematikkursen sehr gute Leistungen vorzuweisen hatten, waren ohne Hilfe nicht in der Lage, die Beweisschritte zu skizzieren und auch nicht die einzelnen Beweisschritte formal bis in die Einzelheiten ausgeführt aufzuschreiben. Meines Erachtens hat das Ursachen, die zu beheben wären. Eine davon ist, daß Beweise für Aussagen über Mengen ungewohnt oder gar völlig neu für die Schüler waren. In den Fällen, wo die Mengensprache im früheren Mathematikunterricht benutzt wurde, wurden - so schließe ich - viele Gesetze der Mengenalgebra vom naiven Standpunkt aus betrachtet und ohne Beweis (nur auf Venn-Diagramme gestützt) als geltend angenommen. Besondere Schwierigkeiten bei derartigen Beweisen macht, daß der Beweis nicht unmittelbar für das in der Aussage bezeichnete Objekt, die Menge, geliefert werden kann, sondern für die einzelnen Elemente der Menge. Da es sich dabei meist nicht um endliche Mengen handelt, ist es unmöglich, sich Element für Element vorzunehmen und für jedes die entsprechende angestrebte Aussage zu beweisen. Es muß eine Variable eingeführt werden, die die Rolle der Elemente übernimmt. An diesen Gebrauch muß der Schüler erst gewöhnt werden. Ist er das, so sind die Beweise von Aussagen über Mengen meist viel leichter auszuführen als die Beweise der Sätze aus der Elementargeometrie. Für die Folgerungen, die im Beweisgang der hier zu Beginn des Lehrgangs vorkommenden Sätze vorkommen, sind meist nur die vorausgegangenen Definitionen anzuwenden, während für die Beweise aus der Elementargeometrie meist eine Anzahl von Lehrsätzen gegenwärtig sein muß.

Für Aufgabe 11 soll die in Aufgabe 10 gelernte Arbeitsweise, Beweise von Aussagen über Mengen zu liefern, gleich nochmals verwendet werden. Hier sind, so hofft man, keine so detaillierten Hinweise mehr nötig, weil der Schüler an Aufgabe 10 gelernt hat. Bemerkenswert ist,

daß in diesem Stadium des Kurses dem Schüler jeweils nur die entsprechenden Aussagen über zwei offene Mengen aus $\mathbb{R}$ zugemutet werden. Über Vereinigung und Durchschnitt von mehr als zwei offenen Mengen wird bewußt erst an späterer Stelle reflektiert, und zwar in dem Bestreben "Schwierigkeiten zu isolieren", d.h. zu versuchen, Aussagen für die das Einsehen ihrer Gültigkeit und das Beweisen gehäufte Schwierigkeiten bieten, so in eine Kette von Aussagen aufzuschlüsseln, daß diese einzelnen Aussagen weniger schwierig zu beweisen sind, aber schließlich doch zu der großen Aussage zusammengesetzt oder ausgebaut werden können.

Es ist unser Ziel, die Axiome des topologischen Raumes als die gemeinsamen Eigenschaften der drei Mengen offener Mengen finden zu lassen, die mit Hilfe der Definitionen 1, 2 und 3 gewonnen wurden. Aus diesem Grund müssen diese Mengen offener Mengen zunächst herausgestellt werden.

Dies wird zuerst für die Menge der in $\mathbb{R}$ offenen Mengen vorgenommen. Um den Schüler nicht zu überfordern, sollen zunächst nur eine gewisse Anzahl von offenen Mengen aufgezählt werden. Bei dieser Tätigkeit wird klar, daß alle offenen Mengen nacheinander aufzuschreiben unmöglich ist. Sogleich von der Menge aller offenen Mengen zu sprechen, hat der Schüler keine Skrupel. Einige unendliche Teilmengen dieser Menge kann der Schüler aus der Erfahrung von Aufgabe 8 her nennen, z.B. die Menge aller offenen Intervalle oder die Menge aller Vereinigungen zweier offener Intervalle oder die Menge aller

Vereinigungen dreier offener Intervalle. Man könnte deshalb hier einhaken und erarbeiten, daß die Menge aller in $\mathbb{R}$ offenen Mengen gerade die Menge aller beliebigen Vereinigungen von offenen Intervallen ist. Zu beweisen wären hierzu zwei Aussagen: Jede Vereinigungsmenge von beliebig vielen offenen Intervallen ist nach Definition 3 eine offene Menge. Jede denkbare, nach Definition 3 offene Menge ist Vereinigung von offenen Intervallen, wobei möglicherweise auch - wenn erforderlich - unendlich viele offene Intervalle vereinigt werden müßten, um die vorgelegte Menge zu erhalten.

Die erste Aussage schließt das Problem mit ein, ob die Vereinigung unendlich vieler offener Mengen aus $\mathbb{R}$ wieder eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist. Diese Frage wird ausführlich in Abschnitt 2.1.2 behandelt. Somit würden wir mit dem Beweis der ersten Aussage einen Vorgriff innerhalb des wohlüberlegten Kursablaufes begehen. Wir begnügen uns deshalb mit der Feststellung, daß die Ermittlung der Menge aller offenen Mengen aus $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Definition 3 möglich ist. Die dazu nötigen Denkschritte, die in der beschreibenden Form der Mengenschreibweise implizit enthalten sind, werden mit den Schülern besprochen. Dabei ergibt es sich, daß über die Potenzmenge einer Menge zu sprechen ist. Für die Wiederholung dieses Begriffs, der später gebraucht wird, ist dies eine gute Gelegenheit. Für das Verständnis des Axiomensystems ist es unbedingt nötig, den Schüler besser an Mengen zu gewöhnen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind. Hierzu und als behutsame Vorbereitung auf die Passagen des Kurses, wo die gemeinsamen Eigenschaften von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{T}_{\mathbb{G}}$ zu finden

sind, wird hier Aufgabe 12 eingeschaltet.

Aus Gründen der Handlichkeit führt man die Abkürzung

$\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ ein. Spontan werden die Schüler auch von der Menge aller in $\mathbb{I}$ offenen Mengen sprechen und ebenso von der Menge aller in $\mathcal{G}$ offenen Mengen. Die Abkürzungen für diese Mengen wählen wir analog: $\mathcal{I}_{\mathbb{I}}$, $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$. Wir werden im folgenden beibehalten, jeweils Mengen von Mengen mit deutschen Buchstaben zu kennzeichnen.

Das nächste Ziel ist, die für das Axiomensystem wichtigen Eigenschaften der obigen drei Mengen zu finden. Zunächst wird noch einmal darüber reflektiert, was der wichtigste Bestandteil der Charakterisierung der offenen Mengen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ oder $\mathcal{G}$ war. Daß diese Charakterisierung nicht ohne eine Entfernungsmessung auskommt, wurde den Schülern sicher nicht voll bewußt, da sie im Laufe der Schulmathematik nur Räume kennengelernt haben, in denen eine Abstandsfunktion definiert ist. Aber nach Hinweis darauf, ist den Schülern die Rolle der Abstandsfunktion in den Definitionen 1, 2, 3 klar. Nun kommt die für den Schüler verwirrende Forderung, bei der Definition offener Mengen ohne Gebrauch einer Abstandsfunktion auszukommen. Die Lösung dieser Aufgabe bereitet dem Schüler zunächst Schwierigkeiten. Die Eigenschaften (O1) bis (O3) wird er nicht sofort ohne Hilfe finden. Deshalb leiten wir ihn an, indem wir nach gemeinsamen Eigenschaften der Mengen $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{I}_{\mathbb{I}}$ und $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$

fragen. Diese Betrachtungsweise ist für den Schüler ungewohnt, es sei denn, er hat vorher einen Kurs in Boolescher Algebra mitgemacht. Der Hinweis, doch die Erkenntnisse aus Aufgabe 12 und den zurückliegenden Aufgaben zurate zu ziehen, bringt den Schüler dahin, zu sehen, daß in jeder der drei Mengen $\mathcal{F}_R, \mathcal{F}_\pi, \mathcal{F}_\sigma$ die leere Menge vorkommt und außerdem jeweils die Menge in der die offenen Mengen erklärt wurden, also R oder π oder σ . Hat man dies einmal verbalisiert, so kann es eine große Hilfe für den späteren Gebrauch der Axiome bedeuten, wenn wir bereits jetzt zur Formulierung der Ergebnisse Variable benutzen. Die Tatsache, daß der Gebrauch von Variablen in diesem Zusammenhang nützlich ist, sehen Schüler ein, wenn man die Schreibweise des Skriptums verwendet. Hierzu schreibt man in Kurzform die gefundenen Eigenschaften für jedes Mengensystem einzeln auf - aber so, daß die Gemeinsamkeit durch das Untereinanderschreiben der Aussagen besonders auffallend wird. Nun steht dreimal untereinander "leere Menge ist Element von ...", wobei in jeder Zeile eine der drei Mengen von offenen Mengen in die Lücke tritt. In der anderen Gruppe der Aussagen stehen die drei Punktmengen R, π, σ untereinander und von jeder heißt es, daß sie Element der jeweils zu ihr gehörenden Menge offener Mengen ist. Will man alle Aussagen in einem Satz zusammenfassen, so muß für die drei Räume eine Variable eingeführt werden (z.B. die Variable M) und für die zugehörigen Mengen offener Mengen ebenfalls (z.B. die Variable $\mathcal{F}$). Die erste gefundene gemeinsame Eigenschaft heißt dann

$$\emptyset \in \mathcal{F} \text{ und } M \in \mathcal{F}$$

Als weitere gemeinsame Eigenschaften der Mengen $\mathcal{F}_R, \mathcal{F}_J$ und $\mathcal{F}_G$ ist ihre Abgeschlossenheit gegenüber den Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ zu finden. Im vorangegangenen Kursablauf war darauf abgezielt worden, zu diesen beiden Eigenschaften, die die Vereinigung und den Durchschnitt offener Mengen betreffen, Erfahrungen zu sammeln. Dies sollte in den drei Räumen sozusagen auf verschiedenen Stufen geschehen. Auf der ersten Stufe wurden die Erkenntnisse für Vereinigung und Durchschnitt zweier ganz spezieller offener Mengen, die konkret vorgegeben waren, erarbeitet. Auf der zweiten Stufe wurden Aussagen über die Vereinigungen zweier beliebiger offener Mengen in den drei Räumen bewiesen. Die dritte Stufe befaßt sich dann mit der Ausweitung der Aussagen auf mehr als zwei offene Mengen. Es erscheint nun günstig, die Zusammenschau der Gemeinsamkeiten der drei Räume hinsichtlich Vereinigung und Durchschnitt bereits auf Stufe zwei vorzunehmen. Der Grund dafür ist, daß hier das Ausdrücken in Variablen leichter fallen dürfte als auf der dritten Stufe. Außerdem kann gerade die Formulierung der Aussagen, die sich nicht mehr auf einen speziellen Raum beziehen, nahelegen, auch von der Spezialisierung auf zwei offene Mengen wegzukommen - d.h. ein Motiv sein, Stufe drei anzustreben.

Methodisch kann (ja sollte) für diese Passage des Kursablaufs eine sehr "offene" (d.h. wenig durch die Lehrkraft geführte) Unterrichtsweise verwendet werden. Wenn möglich, sollte der Kursleiter nur Denkanstöße geben müssen. Diese Phase des Kursablaufs erscheint zwar unscheinbar, hat jedoch eine Art Kontrollfunktion inne und ist deshalb vom Lehrer mit besonderer Sorgfalt zu

gestalten. In dieser Phase werden sich methodische Fehler des zurückliegenden Kursablaufs rächen. Dies wird ersichtlich, wenn die Schüler auch nachdem sie als Beispiel die 1. Eigenschaft durch Zusammenschau der drei Räume gesehen haben, nicht in der Lage sind, die 2. und 3. gemeinsame Eigenschaft der drei Räume zu finden. Hilfe bietet hier, nochmals die Frage aufzuwerfen, ob der Satz in Aufgabe 10 auch zu recht für $\mathbb{J}$ und für $\mathfrak{G}$ formuliert werden könne.

3.1.2 Zu: 2.1.2 Vereinigung und Durchschnitt beliebig
-----vieler offener Mengen-----

Der Gedanke, die schließlich gewonnenen Aussagen "Die Vereinigung (der Durchschnitt) zweier in M offener Mengen ist offen in M " auf Aussagen über mehr als zwei offene Mengen zu erweitern, müßte von den Schülern selbst kommen. Dies wird geschehen, wenn sie in den zurückliegenden Klassen einen Mathematikunterricht hatten, der ihre Kreativität förderte und nicht lähmte. Wenn in dieser Hinsicht früher einmal ein ungünstiger Einfluß herrschte, so ist dieser nicht so schnell wieder wettzumachen und die Gegenwirkung erfordert viel Geschick. Dazu kann aber gerade die Unterrichtsphase des Erweiterns der Aussagen von S. 67 auf mehr als zwei offene Mengen günstig verwendet werden. Hier kann der Schüler sozusagen "im Kleinen" erleben, wie u.U. das Entdecken von neuen mathematischen Aussagen vor sich gehen kann. Von einem bekannten Satz ausgehend, wird intuitiv (oder angeregt durch Analogiebetrachtung) eine Erweiterung vermutet. Die Vermutung erhärtet sich durch Betrachtung von Beispielen. Es wird aber bereits in dieser Phase unter den naheliegenden Beispielen nach einem solchen gesucht, das die Aussage nicht erfüllt. Zuletzt wird der allgemeine Beweis angestrebt. Hat man ein Gegenbeispiel gefunden, so kann versucht werden, die Klasse der Objekte, die die Aussage doch erfüllen, besser in den Griff zu bekommen, und womöglich zu einer wenn auch eingeschränkten Aussage zu kommen.

Als oben angeführtes Beispiel, das die Vermutung bestätigen soll, wird die Vereinigungsmenge von unendlich vielen fest vorgegebenen offenen Mengen aus $\mathbb{I}$ bestimmt. $\mathbb{I}$ wurde deshalb als der Raum gewählt, aus dem die Beispiele entnommen werden, da in ihm die Ergebnisse weniger selbstverständlich erscheinen als in $\mathbb{R}$ und

andererseits aber besser anschaulich darstellbar sind als in 6. Der Schüler kann von sich aus vielerlei Mengen von unendlich vielen offenen Mengen in $\mathcal{K}$ nennen und sollte dazu aufgefordert werden. Die Vereinigungsmenge der genannten Mengen offener Mengen wird nicht in jedem Fall kurz beschreibbar sein. Deshalb gebe man zusätzlich die im Schülerbuch mit $\mathcal{K}$ bezeichnete Menge von offenen Mengen in $\mathcal{K}$ vor. Ohne Hilfe des Schülerbuches sollen die Schüler nun die Vereinigungsmenge der gegebenen offenen Kreisscheiben bilden. Einziger Hinweis sei, eine - wenn auch unvollständige - Skizze anzufertigen. Dann ist jeder Schüler - so meine Erfahrung - in der Lage, die Vereinigungsmenge verbal zu beschreiben. Allenfalls gibt es Diskussionen¹⁾ unter den Schülern, ob die Punkte der Geraden $G_1: x_2 = 1,5$ ²⁾ und $G_2: x_2 = -1,5$ ²⁾ zur Vereinigungsmenge gehören oder nicht. Diese Frage ist wichtig, da davon die Entscheidung abhängt, ob die Vereinigungsmenge offen ist oder nicht. Es wird kaum vorkommen, daß ein Schüler der Meinung ist, die Geraden G_1 und G_2 gehören ganz oder teilweise zur Vereinigungsmenge. Tritt das doch ein, so kann man den Schüler rasch davon überzeugen, daß er irrt. Man führt ihm dazu vor Augen, daß diese Punkte von G_1 oder G_2 zu mindestens einer an der Vereinigung beteiligten Mengen gehören müßten. Mit Hilfe der Koordinaten eines dieser Punkte kann gezeigt werden, daß er zu keiner der offenen Kreisscheiben gehören kann. Treten außerdem Irrtümer auf, so kann die Ursache sein, daß sich der Schüler nicht bewußt war, daß die Mittelpunkte der Kreise auf der x_1 -Achse dicht liegen.

1) Der günstigste Fall wäre hier, wenn sich der Lehrer gar nicht einschalten müßte.

2) Diese Schreibweisen sind in der Schule gebräuchlich.

Während die verbale Beschreibung der entstehenden Vereinigungsmenge unbedingt jedem Schüler möglich sein sollte, kann man u.U. darauf verzichten, sie in Mengenschreibweise wiedergeben zu lassen. Hieran könnten solche Schüler scheitern, deren Erfahrungen in der Beschreibung von Punktmengen aus der Vektorrechnung¹⁾ sehr einseitig sind, d.h. denen nur die Vektorschreibweise gegenwärtig ist, nicht aber die Komponentenschreibweise. Einen interessanten Lösungsversuch kann ich aus Kurs II berichten. Er zielte intuitiv auf die Beschreibung des entstehenden Streifens als kartesisches Produkt. Aus Mangel an gründlichen Kenntnissen über diese Mengenverknüpfung wurde die Schreibweise jedoch nicht vollendet, sondern nur die beteiligten Mengen genannt, die Menge $\{x \mid -1,5 < x < 1,5\}_{\mathbb{R}}$ und die Menge $\mathbb{R}$.

Hier ist die anschauliche Beschreibung wichtiger als die exakte schriftliche Wiedergabe der Punktmenge. Die entstehende Vereinigungsmenge wollen wir im folgenden immer (offenen) Parallelstreifen nennen oder kürzer Streifen. Dabei sollen jeweils Punkte der Begrenzungsgeraden des Streifens nicht zur Punktmenge gehören. Glücklicherweise haben wir bereits in Aufgabe 4 überlegt, daß dies eine offene Menge in $\mathbb{JL}$ ist (nach Definition 1).

Wir haben also für ein Beispiel die Vermutung bestätigt. Der mit mathematischem Denken vertraute Schüler weiß, daß dies nicht genügt, die Wahrheit einer Vermutung zu beweisen. Auch weitere Beispiele, die leicht zu finden sind, wie die Vereinigung aller offener Kreisscheiben mit vorgegebenem Radius ϱ , deren Mittelpunkte auf einer fest vorgegebenen Kreislinie liegen (hier erhalten wir

1) Hier als Bezeichnung für das entsprechende Teilgebiet der Schulmathematik gebraucht.

als Vereinigungsmenge einen offenen Kreisring oder wieder eine offene Kreisscheibe) erhärten zwar die Vermutung, ersetzen aber nicht den nötigen Beweis.

Dieser sollte im Kursablauf wenigstens skizziert werden. Das Ersetzen ausführlicher Beweise durch Beweissskizzen gehört, wie bisher zu bemerken war, zur Eigenart des methodischen Vorwurfs dieses Kurses. Die Begründung dafür wurde in 1.4.2 ausführlicher gegeben. Bewußt wird im Skriptum der ausführliche Beweis nicht in formalisierter Kurzform, sondern unter Benützung ganzer Sätze gegeben. Gerade für das Selbststudium soll dadurch dem Leser der Zugang erleichtert werden.

Auf die Zusammenfassung des Ergebnisses über die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen folgend erschien es mir ratsam, einige Übungszeit für den Gebrauch des Zeichens " $\cup$ " zu verwenden. An dieser Stelle läßt sich diese Übung im Zusammenhang mit der davor erarbeiteten Aussage recht gut motivieren. Außerdem lag mir daran, den Gebrauch des Zeichens $\cup$ eingeübt zu haben, bevor die Definition des topologischen Raumes erfolgt, da das Zeichen $\cup$ dort dann schon eingesetzt werden kann (siehe S. 77). Die Gewöhnung an das Zeichen erfolgt behutsam, indem es erst für die Schreibweise einer Vereinigungsmenge aus endlich vielen Mengen dann einer aus unendlich (aber abzählbar) vielen Mengen und schließlich (für den Schüler hier eventuell noch nicht voll bewußt) aus überabzählbar vielen Mengen verwendet wird. Mit diesem Vorgehen habe ich gute Erfahrungen gemacht.

Was für die Vereinigung unendlich vieler offener Mengen galt, erwartet der Schüler auch für den Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen, nämlich, daß dieser wieder offen ist. Man hatte in Aufgabe 11 bewiesen, daß der

Durchschnitt zweier offener Mengen in $\mathbb{R}$ wieder eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist. Indem die Durchschnittsbildung Schritt für Schritt ausgeführt wird, wenn 3 oder 4 oder mehr offene Mengen an ihr beteiligt sind, folgt, daß auch diese Durchschnittsmengen wieder offene Mengen in $\mathbb{R}$ sind. Dem Schüler ist klar, daß die Gedankengänge für die Räume $\mathbb{J}$ und $\mathbb{G}$ dieselben sind. Er ist nun versucht, anzunehmen, daß dieses Beweisverfahren auch den Fall des Durchschnitts von unendlich vielen offenen Mengen mit einschließt. Für die Vereinigungsmengenbildung hatte sich die entsprechende Vermutung bewahrheitet. Daß dies bei der Durchschnittsbildung nicht der Fall ist, lernt der Schüler an einem Beispiel. Als Beispiel eignet sich etwa die Menge $\mathcal{U}$ von unendlich vielen offenen Kreisscheiben, die wie folgt beschrieben wird: $\mathcal{U}$ sei die Menge aller offenen Kreisscheiben mit Zentrum $(0|0)$ und einem Radius, der kleiner oder gleich 2 cm ist.

Auf die Formulierung des Problems ist besondere Sorgfalt zu verwenden. Der Schüler ist in der Lage, einige Kreisscheiben, die zu $\mathcal{U}$ gehören, zu zeichnen und anzugeben, auf welche Weise weitere eingezeichnet werden können. Als Stütze ist deshalb die Menge $\mathcal{U}$ so gewählt worden, daß die offene Kreisscheibe mit Radius 2 cm noch dazu gehört, einige Schüler reagieren nämlich andernfalls etwas verwirrt, wenn sie sozusagen keine "erste" Kreisscheibe haben. Dem Schüler sollte klar sein, daß $\mathcal{U}$ unendlich viele Elemente hat. Es wird dann rasch als Schnittmenge aller zu $\mathcal{U}$ gehörenden Mengen die einpunktige Menge $\{z\}$ genannt ($z=(0|0)$). Die Bearbeitung der Aufgabe 4 hatte gezeigt, daß die Menge $\{z\}$ in $\mathbb{J}_\pi$ nicht offen ist, worauf wir jetzt zurückgreifen können.

Allerdings ist bemerkenswert, daß einige Schüler meiner Versuchsklassen, die zwar das Ergebnis $\{z\}$ ohne Zögern

genannt hatten, nachträglich Zweifel an ihrer Antwort bekamen. Ich bekam heraus, daß sich diese Schüler das Ergebnis nachträglich anschaulich zu bestätigen versuchten und daß sie daran scheiterten, daß das System der offenen Kreisscheiben in Richtung immer kleiner werdender Radien nicht mehr für die Anschauung faßbar ist. Hier muß bedacht werden, daß man nach unveröffentlichten Forschungen von Sorger und Freund (Kiel)¹⁾ von der Psychologie des mathematischen Lernens her gesehen verschiedene Typen des Auffassens mathematischer Gegenstände bei den Schüler unterscheiden kann. Zwar werden diese Typen sicher nicht in "Reinform" auftreten, sondern in Anklängen oder als Mischformen, trotzdem ist deren Verschiedenheit im Verstehen im methodischen Konzept zu berücksichtigen. In unvollständiger Aufzählung könnten diese Typen mit folgenden Schlagworten charakterisiert werden: der geometrische Typ, auch Anschauungstyp, der arithmetische Typ, auch Erfahrungstyp, der logische Typ, auch Strukturtyp. Der Schülertyp, der stärker der Anschauung verhaftet ist, wird - wenn der Dialog Lehrer-Schüler lebendig ist - bei vorgenanntem Problem erkennbar werden. Den Widerspruchsbeweis der Aussage "Der Durchschnitt enthält nur den Punkt z" sehen auch dann diese Schüler ein. Diesen sogenannten "Anschauungstypen" unter den Schülern bin ich in meiner Berufspraxis immer wieder begegnet. Es ist nicht leicht, aber nötig, sie zu dem zu führen, was Emmy Noether²⁾ als "abstrakte Anschauung" bezeichnet. Das didaktische Schlagwort "Gewöhnung" möchte ich hier jedoch sehr verantwortungsbewußt als "Rezept" verstanden wissen.

1) Ansätze und Verfahrensweisen wurden in einem Vortrag anlässlich der 6. Bundestagung für Didaktik der Mathematik, 1974, Berlin angedeutet.

2) Zitiert nach G. Koethe's Vorwort zu Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis, Braunschweig 1972

Als nächstes ist anzustreben, die früheren Ergebnisse über die Vereinigung von endlich vielen offenen Mengen und die soeben gewonnenen Ergebnisse in einer allgemeinen Aussage zusammenzufassen. Hierbei verwenden wir in der Aussage über die Vereinigung von offenen Mengen die Sprechweise "beliebig viele". Damit bringen wir sowohl die früher gewonnene Erkenntnis über die Vereinigung von endlich vielen wie auch die jetzt gewonnene über die Vereinigung von unendlich vielen offenen Mengen zum Ausdruck. Da wir für Systeme von unendlich vielen offenen Mengen ein Beispiel gefunden haben, für das der Durchschnitt keine offene Menge ist, können wir für den Durchschnitt nicht die entsprechende Aussage wie für die Vereinigung formulieren. Für das allgemeine Verständnis von Allaussagen ist es nützlich, trotzdem dem Schüler auch vor Augen zu führen, daß es sehr wohl Mengen von offenen Mengen gibt, die bei Durchschnittsbildung auf offene Mengen führen. Generell kann jedoch über die Offenheit oder Nicht-Offenheit des Durchschnitts von

unendlich vielen offenen Mengen keine allgemeine Aussage gemacht werden. Nun ist es wichtig, daß trotzdem eine allgemeine Aussage - allerdings über endlich viele offene Mengen - gemacht wird. Es kann durch sukzessives Anwenden der entsprechenden Aussage für zwei Mengen gezeigt werden, daß der Durchschnitt offen ist.

Nun muß nicht mehr detailliert erarbeitet werden, daß die beiden Aussagen nicht nur in $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ sondern auch in $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ gelten. Die Beweise lassen sich analog übertragen und das Gegenbeispiel ebenso. Die allgemeinen Aussagen über Durchschnitt und Vereinigung wurden im Text eingeraht, so wie im Kapitel vorher die gemeinsamen Eigenschaften der Mengen $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. Da die zuletzt gefundenen Eigenschaften umfassender sind als die früher gefundenen, bleiben schließlich drei zu nennen:

Für $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ und $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ gilt:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{T}_M$ und $M \in \mathcal{T}_M$ (M stehe für $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ oder $\mathcal{C}$)
- (2) Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen aus $\mathcal{T}_M$ ist wieder offen (also aus $\mathcal{T}_M$).
- (3) Der Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen in $\mathcal{T}_M$ ist wieder offen (also aus $\mathcal{T}_M$).

Die gefundenen Eigenschaften sind nun völlig unabhängig von den speziellen anschaulichen Bedeutungen von $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ und $\mathcal{C}$. Man könnte, das sieht der Schüler an eigenen Übungen ein, zu einer beliebigen Menge M Mengen von Teilmengen angeben, die diese Eigenschaften ebenfalls aufweisen. Man sammelt nun gemeinsam mit den Schülern solche Mengen von Teilmengen einer gegebenen Menge

$M = \{a, b, c\}$. Es werden z.B. gefunden:

$\{\emptyset, \{a, b, c\}\}$ oder $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ oder
 $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ usw.

An jeder dieser Mengen von Teilmengen werden die oben zusammengestellten Eigenschaften nochmals erprobt. Dann

erscheint es plausibel, allen diesen Teilmengen von $\mathcal{P}(M)$, die wie die Mengen $\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_I$ und $\mathcal{T}_G$ in drei Eigenschaften übereinstimmen, einen gemeinsamen Namen zu geben:

Topologie. Es leuchtet ein, daß die Elemente einer Topologie, wie wir es von den Topologien $\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_I, \mathcal{T}_G$ her gewöhnt sind, offene Mengen heißen sollen. Somit sind wir bei der nötigen Festlegung dessen angekommen, was unter einem topologischen Raum verstanden werden soll also dem Paar $(M, \mathcal{T})$. Hierzu dienen natürlich die Aussagen über die drei Eigenschaften, welche wir nun Axiome nennen. Es kann durchaus vorkommen, daß Schüler der Kollegstufe noch nie vorher den Ausdruck "Axiom" gehört haben. Für diese sind hier einige weitere Ausführungen nötig, eventuell auch ein Ausflug in die Geschichte der Mathematik. Der Lehrer findet knapp und übersichtlich dargestellt ein Kapitel "Axiome, Definitionen und Sätze" bei Stender¹⁾, wo auch Literaturhinweise für vertiefendes Studium zu finden sind.

Dem Schüler wird ein wesentlicher Unterschied zwischen $\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_I, \mathcal{T}_G$ und den durch die Axiome definierten Räumen auffallen, nämlich der: in den Räumen $\mathcal{T}_R, \mathcal{T}_I, \mathcal{T}_G$ können offene Mengen "direkt" definiert werden (siehe Definitionen 1 bis 3) während das Axiomensystem den "Umweg" über die Festsetzung der Menge $\mathcal{T}$ verlangt. Je mehr Beispiele der Schüler aber kennenlernt - so meine Erfahrung - umso weniger ist er von diesem Unterschied irritiert.

1) Stender, R.: Didaktische Themen aus der neueren Mathematik, Heidelberg 1962, S. 32-34

3.1.3 Zu: 2.1.3 Die Axiome und weitere Beispiele für topologische Räume

Das Kapitel 2.1 gliedert sich in drei Abschnitte:

1. Vorbereitende Fragen und Aufgaben
2. Vereinigung und Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen
3. Die Axiome und weitere Beispiele für topologische Räume.

Die Abschnitte 1. und 2. dienen dazu, den Schüler induktiv an die Axiome heranzuführen. Dies ist an dieser Stelle erreicht und man kann sich nun dem Abschnitt 3. widmen.

Die im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Eigenschaften werden nun als Axiome an den Anfang gestellt. Die Eigenschaften, die man von der Menge $\mathcal{Y}$ verlangt, werden dabei in Kurzform wiedergegeben. Dies geschieht, um dem Axiomensystem eine möglichst übersichtliche Form zu geben. Die erste Eigenschaft (die leere Menge und die Menge M selbst sollen zu $\mathcal{Y}$ gehören) ist sehr schnell in Kurzform wiedergegeben. Um die zweite Eigenschaft in knapper Form wiederzugeben, wäre es das beste, den Sprachgebrauch "Teilmenge von $\mathcal{Y}$ " einzuführen. In dieser Sprechweise wäre der Ausdruck "beliebig viele" dann bereits eingefangen. Nach meiner Erfahrung aber haben Schüler doch Schwierigkeiten, solche Teilmengen abstrakt

zu behandeln, vor allem auch dann, wenn es darum geht, alle Elemente dieser Menge von Mengen miteinander zu vereinigen. Die Schwierigkeit für die Schüler liegt darin, daß die Elemente der Menge selbst wieder Mengen sind. Deshalb wird bei der Formulierung von (O2) bewußt vorgezogen, von beliebig vielen T_i zu sprechen. Dabei wird zwar implizit eine Indexmenge angesprochen, die endlich oder (abzählbar oder überabzählbar) unendlich sein kann, sie wird aber bewußt hier nicht aufgeschrieben, sondern lieber an der "gesprochenen" Form des Axioms (O2) festgehalten.

Die Schreibweise $\bigcup_{T \in \mathcal{T}}$ oder gar die Kurzschreibweise $\bigcup_{\mathcal{T}}$ würden freilich eleganter wirken. Aus pädagogischen Gründen gebe ich jedoch der weniger eleganten (siehe S. 73) den Vorzug.

Bei einer Diskussion für und wider die obigen Schreibweisen (insbesondere hinsichtlich der "Superkurzschreibweise" $\bigcup_{\mathcal{T}}$) muß bedacht werden, daß der Schüler erhebliche Übung (d.h. Zeit) braucht, sich diese wirklich vertraut zu machen. Selbst die Schüler meines Kurses I die im Gebrauch der für die Schulmathematik nötigen mathematischen Formalsprache recht geschickt waren, hatten mit der Schreibweise " $\bigcup_{\mathcal{T}}$ " ihre Schwierigkeiten. Somit rate ich von ihrer Verwendung ab. Das Risiko, durch die formale Gestaltung den Zugang zu den Axiomen zu erschweren, ist zu groß.

Für die Formulierung von Eigenschaft 3 wähle ich wieder die ursprüngliche Form der Aussage über den Durchschnitt

von zwei offenen Mengen. Daraus kann bekanntlich gefolgert werden, daß der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist. Als Axiom ist diese letztere Aussage jedoch unhandlicher, wenn es darum geht, eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge daraufhin zu untersuchen, ob sie diese Aussage erfüllt.

Die auf das Axiomensystem und die Einführung der Bezeichnung "Punkt, offene Menge, Topologie" im Skriptum folgende Anmerkung erfordert vom Lehrer wie auf S. 245 ausgeführt, einige methodische Sorgfalt. Teilmengen von Mengen, deren Elemente selbst wieder Mengen sind, zu untersuchen, fällt dem Schüler nicht leicht. Deshalb wurde dem Schüler bereits während der Hinführung auf die Axiome Gelegenheit gegeben, Erfahrungen über die Potenzmenge einer Menge und über Teilmengen der Potenzmenge zu sammeln.

Es ist für den späteren Gebrauch der Axiome ratsam, sie noch einmal ausführlich unter Benützung des Begriffs "offene Menge" aufzuschreiben. Die Wiederholung der Axiome in anderer Form ist dem Behalten zudem förderlich. In beiden Formen ist das Axiomensystem recht einprägsam und macht den Schülern nach meiner Erfahrung keine Schwierigkeiten. Bewußt wird im Anschluß eine vermeintliche Wiederholung begangen und nochmals konstatiert, daß $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ ein topologischer Raum ist und ebenso $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ und $(\mathbb{C}, \tau_{\mathbb{C}})$. Dies geschieht deshalb, da hervorgehoben werden soll, daß die bisher besprochenen Räume Modelle für topolo-

gische Räume darstellen. Außerdem soll dadurch die Suche nach weiteren Modellen angeregt werden.

Die im Schülerbuch folgenden Beispiele sind vor allen Dingen für das Selbststudium gedacht. In dem vom Lehrer geführten Kurs wird man die Suche der Beispiele den Schülern selbst überlassen. Man hat bereits zur Ermittlung des Axiomensystems Beispiele für Topologien angegeben, die die drei besagten Eigenschaften aufwiesen. Methodisch bedeutsam ist, daß es bei den Beispiel-Topologien nicht auf eine Abstandsfunktion ankommt und die Elemente der Menge M , die Punkte des Raumes, keine anschauliche geometrische Bedeutung hatten. Der Schüler lernt so nach und nach den Begriff "Raum" unabhängig von jeder anschaulichen Bedeutung zu verwenden.

Bei der Suche nach Beispielen stieß man auf die sogenannten *t r i v i a l e n* *T o p o l o g i e n*. Wenn das nicht der Fall war, kann der Lehrer hier Einfluß nehmen und vorschlagen, die Mengen $\mathcal{P}(M)$ und $\{\emptyset, M\}$ daraufhin zu untersuchen, ob sie die drei Axiome erfüllen. Anschließend werden Bezeichnungen für die beiden trivialen Topologien eingeführt. Gern gebrauchen die Schüler auch die Namen kleinste und größte Topologie für die trivialen Topologien, ja sie bevorzugen diese Bezeichnungen.

Man stellt gerade am Beispiel der trivialen Topologien fest, daß es auf einer Menge mehrere Topologien geben kann. Hatten die Schüler in ihrer früheren Schulzeit die Gelegenheit, die Peano-Axiome kennenzulernen, oder wurde ihnen bewußt gemacht, daß die Behandlung der Elementargeometrie, ebenfalls auf einem Axiomensystem aufbauend geschehen kann, so muß dies Ergebnis den Schüler verblüffen, da zu diesen Axiomensystemen jeweils nur

genau ein¹⁾ Modell gehörte. Die Tatsache, daß es zum vorliegenden Axiomensystem mehrere (auch nicht zueinander isomorphe) Modelle gibt, kann es in den Augen des Schülers u.U. entwerten. Diese Erfahrung an einer abstrakten Struktur kann ihm trotzdem nicht und sollte ihm auch - aus Gründen, die in der Einleitung dieser Arbeit dargelegt wurden - nicht erspart werden.

Von der Erkenntnis ausgehend, daß zu einer Menge mehrere Topologien existieren können, ist der Fall zu überdenken, daß diese Topologien untereinander in Beziehung stehen können. Man wird danach suchen, welche Bedeutung dies für die offenen Mengen nach sich zieht. Es ist wichtig, hier nicht nur die Teilmengenbeziehung zu nennen, sondern zu konstatieren, daß damit alle in der einen Topologie offenen Mengen auch in der anderen offen sind. Setzt man echte Teilmengenbeziehung voraus, so ist dies umgekehrt nicht der Fall. Daß die Teilmengenbeziehung für Topologien einen speziellen Namen bekommt, ist methodisch gesehen nicht von großer Bedeutung. Das Hasse-Diagramm der Teilmengenbeziehung bringt aber Übersichtlichkeit in die Menge aller Topologien, die zu einer gegebenen Menge konstruierbar sind. Die Rolle der trivialen Topologien hierbei ist wichtig. Es ist ferner herauszustellen, daß die Anordnung der Topologien einer Menge nicht notwendig eine Kette bilden muß, daß es also durchaus Topologien geben kann, die nicht in Teilmengenbeziehung zueinander stehen.

Die folgende Aufgabe 13 erscheint auf den ersten Blick mathematik-didaktisch wenig wertvoll. Sie macht möglicherweise den Eindruck bloßer Arbeitstherapie. Die Erfahrung mit meinen Versuchsklassen hat jedoch ganz im Gegen-

1) bis auf Isomorphie

teil gezeigt, daß die Schüler gerade von dieser Aufgabe stark angesprochen sind. Es macht ihnen schlicht ausgedrückt Spaß, sich mit diesem Problem zu befassen. Daß diese Frage sozusagen einen arithmetischen Aspekt aufwirft spricht Schüler ganz besonders an. Alle Schüler, auch die, die sonst phlegmatisch waren, machten gerne freiwillig mit, weitere Topologien zu suchen. Ja, ohne mein Eingreifen wären die Schüler versucht gewesen, unermüdlich ein Gesetz zu suchen, das die Anzahl der Topologien in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente der Menge ermittelt, - auf der sie erklärt sind. Mir kam es dagegen neben dem unten geschilderten Ziel besonders auf das Hasse-Diagramm an. Aus Zweckmäßigkeitsgründen richtet man es wohl von vornherein so ein, daß die Topologie mit den wenigsten Elementen die sogenannte in-diskrete Topologie, in der untersten Zeile des Diagramms zu stehen kommt und in jeder höheren Zeile jeweils Topologien mit einer offenen Menge mehr als in der Zeile darunter stehen. Die "Ist gröber als"-Beziehung wird dann mittels von unten nach oben verlaufender Pfeile ausgedrückt. In der obersten Reihe steht dann die diskrete Topologie. Zur Mitte zu wird die Anzahl der möglichen Topologien immer größer. Obwohl die Schüler bis dahin das Hasse-Diagramm nicht kannten, waren sie - mit obiger Anleitung versehen - sofort in der Lage es anzufertigen. Die Übungsaufgabe ist auch insofern nützlich, als man hier eine große Reihe von Beispiel-Topologien sammelt, die später gut zu gebrauchen sind. Zum Auffinden der Beispiel-Topologien ist zu sagen, daß man sicherlich nicht so vorgehen wird, daß man nach und nach beliebige Teilmengen der Potenzmenge herausgreift und untersucht, ob sie die Axiome erfüllen, sondern man wird vielmehr untersuchen, ob durch Hinzunahme einer weiteren Teilmenge von M die Abgeschlossenheit der Menge $\mathcal{T}$ von Mengen hinsichtlich der Durchschnitts- und Vereinigungsmengenbildung noch gewährleistet ist. Ist dies nicht der

Fall, so müssen die Durchschnittsmengen und Vereinigungsmengen der neu hinzugekommenen "offenen" Menge mit den bereits vorhandenen noch zur Menge $\mathcal{Y}$ als Elemente hinzugenommen werden.

Dieses geschilderte Prinzip des Aufsuchens von Beispielen für Topologien wiederholt sich beim Lösen der Aufgabe 14. Hier soll die größte Topologie auf einer fünfelementigen Menge gefunden werden, in der drei gegebene Mengen offen sind. Die Konsequenz ist, daß Durchschnitte und Vereinigungen von Paaren aus diesen drei Mengen auch zur gesuchten Topologie gehören müssen, außerdem natürlich nach Axiom (O1) die leere Menge und M selbst.

Aufgabe 15 erarbeitet ein konkretes Beispiel für den Satz, daß der Durchschnitt zweier Topologien auf ein und derselben Menge wieder eine Topologie auf dieser ist. Daß dieser Satz nicht zunächst allgemein im Verlauf des Kurses behandelt wird, entspricht einem methodischen Prinzip des Lehrgangs, die Abstraktion nicht zu stark überwiegen zu lassen. Außerdem mußte bedacht werden, daß Schüler bereits Schwierigkeiten haben können, zu verstehen, was unter dem Durchschnitt zweier Mengen von Mengen (hier: zweier Teilmengen einer Potenzmenge) gemeint ist. Sie sehen am konkreten Beispiel besser ein, daß man darunter die Menge aller offenen Mengen versteht, die in beiden gegebenen Topologien offen sind. Ausgehend von dem Ergebnis, daß der Durchschnitt wieder eine Topologie auf M ist, wird man versucht sein, einen "Analogieschluß" zu ziehen und zu behaupten, auch die Vereinigung zweier Topologien auf M sei wieder eine Topologie auf M . Hierzu wird in Aufgabe 16 ein konkretes Beispiel geliefert, das zeigt, daß diese Aussage im allgemeinen nicht wahr ist.

Während die Aufgaben 13 bis 16 also stets von einer konkret vorgegebenen Punktmenge M sprachen, wenn auch die Elemente der Menge nicht mehr greifbare Dinge darstellten, sondern durch Buchstaben vertreten wurden, ist Aufgabe 17 bereits einer höheren Abstraktionsstufe zuzurechnen. Hier soll ein allgemeiner Beweis durchgeführt werden. Der Beweis ist nicht schwer zu führen. Man muß lediglich die Axiome (01) bis (03) nachprüfen. Die hierbei nötigen Folgerungen ergeben sich stets direkt aus der Voraussetzung. Für den Nachweis von (02) und (03) ist es nötig, Fallunterscheidungen zu treffen, je nachdem, ob einer der Partner bei Bildung von Durchschnitt und Vereinigung M ist oder nicht. Die Schwierigkeiten für die Schüler bestehen lediglich darin, daß es sich nun bei den Elementen von L nicht mehr um namentlich bekannte Elemente handelt, und auch nicht bekannt ist, wieviele Elemente L und auch nicht wieviele M hat. Dagegen kann man nicht sagen, daß diese Aufgabe zu schwierig ist, denn bereits bei Bearbeitung der Aufgabe 13 war der Schüler zur Auffindung von Topologien der nächsthöheren Etage des Hasse-Diagramms (eine offene Menge mehr als die Topologien der darunterliegenden Etage) genauso vorgegangen, wie es Aufgabe 17 als Konstruktionsprinzip für Topologien vorschlägt. Am konkreten Beispiel hat der Schüler also bereits - obzwar versteckt - gesehen, daß die Aussage, die bewiesen werden soll, wahr ist.

Die darauf folgende Aufgabe 18 liefert Beispiele für Topologien, die in den Kapiteln "Konvergenz" und "Stetige Abbildungen" gebraucht werden. Der darin geforderte Beweis ist trotz des gegebenen Hinweises für den Schüler nicht einfach, da hierzu die de Morgan'schen Regeln wiederholt werden müssen. Ist diese Regel den Schülern unbekannt (wie in Kurs II), so kann aus zeitlichen Gründen dem Schüler ausnahmsweise die Regel am Venn-Diagramm demonstriert werden.

In Kurs I war die Regel bekannt. Das Verständnis der Schreibweise für beliebig viele Mengen profitiert von unserer Vorarbeit auf S. 69. Die Regel selbst wurde an dieser Stelle nicht mehr ausführlich bewiesen, sondern als bekannt vorausgesetzt. In jedem Fall wird man bei Aufgabe 18 bevorzugen, sie gemeinsam im Klassenverband zu lösen. Einige Schüler meiner Kurse waren erst dann stärker von der Aufgabe angesprochen, als sie für M die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$ eingesetzt hatten.

Für die Bearbeitung der Aufgabe 18 ist es auch eventuell nötig, daß der Begriff "Komplement einer Menge A in einer Menge M " wiederholt wird, der den Schülern eigentlich schon bekannt sein sollte. Die Abkürzung A' für die Komplementärmenge gibt leider nicht wieder, in welcher Menge das Komplement von A gebildet werden soll. Dieser Nachteil wurde jedoch einer größeren Handlichkeit der Abkürzung zuliebe bewußt in Kauf genommen und diese Entscheidung ist auch vertretbar, da im gesamten Kurs nur Komplemente in der Menge aller Punkte des topologischen Raumes benützt werden. Was unter einer endlichen Teilmenge einer Menge zu verstehen ist, ist dem Schüler aus dem zurückliegenden Unterricht vom naiven Standpunkt aus bekannt, so daß hier keine Fußnote nötig war.

Die Wiederholung der Komplementärmengenbildung

(Fußnote 2 auf Seite 77) erhält hier einen günstigen Platz, da die Komplementärmengenbildung im darauffolgenden Kapitel für die Definition abgeschlossener Mengen gebraucht wird.

Bereits durch Anwendung der Aufgabe 18 auf $\mathbb{R}$ und jetzt durch Aufgabe 19 wird dem Schüler bewußt gemacht, daß die natürliche Topologie $\gamma_{\mathbb{R}}$ nicht die einzige Topologie ist, mit der $\mathbb{R}$ ausgestattet werden kann. Dies sprach die Bemerkung auf

S. 75 zwar bereits allgemein an, ist aber in Bezug auf die vertraute Menge $\mathbb{R}$ für manchen Schüler ein Gedanke, an den er sich erst gewöhnen muß.

Hiermit schließt das erste Kapitel, dessen Anliegen ausschließlich das Axiomensystem war. Dazu gehört das Hinführen auf die Axiome, das Formulieren dieser und - ebenso wichtig - das Anwenden auf erste, einfache Beispiele. Da dies alles geschehen ist, können im nächsten Kapitel die noch zusätzlich nötigen Begriffe eingeführt werden und kann die ganze Theorie durch weitere Beispiele noch ausgebaut werden.

3.2 Zu: 2.2 Weitere Begriffe in topologischen Räumen

Damit die Topologie zu einem brauchbaren mathematischen Instrumentarium wird, sind noch eine große Anzahl weiterer Begriffe außer dem der offenen Menge und des topologischen Raumes nötig. Der Einführung einiger dieser Begriffe ist das Kapitel 2.2 gewidmet. Freilich wird man die Definitionen nicht Schlag auf Schlag aufeinander folgen lassen, sondern wird jeweils mit Hilfe der neuen, wie der vorher definierten Begriffe zunächst Aussagen anstreben, die didaktische Bedeutung haben. Mit letzterem kann vielerlei gemeint sein: es kann bedeuten, daß nun auf logischem, deduzierendem Weg Aussagen erneut gewonnen werden, die aus der Anschauung bereits bekannt sind (hier liegt der didaktische Sinn in der Bestätigung, also einer Sicherung der Erkenntnisse); es kann auch bedeuten, daß Aussagen zu gewinnen sind, die eine notwendige Stufe in einer Abfolge von Erkenntnissen sind, also solche, die auf eine wichtige Aussage hinführen; es kann auch bedeuten, daß Aussagen gewonnen werden, die mit bewirken, daß die Definitionen besser behalten werden, die also eventuell äquivalente Abwandlungen der Definitionen sind.

Die Definition neuer Begriffe hat nur dann einen Sinn, wenn mit diesen Begriffen im weiteren Verlauf des Lehrgangs gearbeitet wird. Ein "Panoptikum" von Begriffen ist didaktisch nicht zu rechtfertigen. Um mit den Begriffen zu arbeiten, ist es für den Schüler nötig, daß er ihre Definitionen parat hat. Diese Forderung ist eine Forderung an die Merkfähigkeit des Schülers. Auch aus diesem Grunde erscheint äußerste Sparsamkeit bei der Auswahl der neu einzuführenden Begriffe am Platze. So wird man letztendlich nicht umhin können, eine exemplarische Auswahl zu treffen.

Dabei ist allerdings zu beachten, daß sich der Schüler am Ende des Kurses ein Bild von der Topologie gemacht haben soll, wenn auch kein vollständiges, so doch ein möglichst zutreffendes. Diese Zielsetzung wurde bereits im Einleitungskapitel näher auseinandergesetzt. Der hier gewählte Mittelweg zwischen Sparsamkeit und Vollständigkeit findet seinen Niederschlag in der Aufzählung der in 2.2 behandelten Begriffe: abgeschlossene Menge, Basis einer Topologie, Hausdorff-Raum, Umgebung eines Punktes, Umgebungsbasis eines Punktes. Welche Bedeutung den einzelnen Begriffen im Ablauf des Kurses zukommt, soll an späterer Stelle zusammen mit den detaillierten Bemerkungen zu den einzelnen Abschnitten von 2.2 geschildert werden. Die Abschnitte heißen: 1. Abgeschlossene Mengen, 2. Basis einer Topologie, 3. Metrische Räume, 4. Umgebungen eines Punktes. Die Reihenfolge, in der die Abschnitte hier gebracht werden, macht jeweils einigermaßen gute Überleitungen möglich. Die Behandlung der Umgebungen zu Ende des Kapitels 2.2 ist insofern günstig als gerade dieser Begriff die Hauptrolle im folgenden Kapitel 2.3 (Konvergenz) spielt.

3.2.1 Zu: 2.2.1 Abgeschlossene Mengen

Der Abschnitt 2.2.1 bringt die Definition abgeschlossener Mengen und einige Aussagen über sie. Die genaue Festlegung des Begriffs ist unbedingt nötig, da zu erwarten ist, daß Schüler intuitiv auch über abgeschlossene Mengen Vorstellungen entwickeln, sobald sie sich mit offenen Mengen befassen. Es besteht die Gefahr, daß diese intuitiven Vorstellungen nicht-offene Mengen als die abgeschlossenen ansehen. Dieser Gefahr muß so früh wie möglich vorgebeugt werden, damit sich diese falschen Vorstellungen nicht eingraben. Deshalb wird bei der praktischen Durchführung des Kurses schon früher über abgeschlossene Mengen geredet worden sein, nicht erst wenn das Kapitel 2.2 erreicht ist. Die eingehendere Behandlung erhält allerdings erst hier einen festen Platz im Skriptum, einmal weil sie an früherer Stelle die sorgfältig geplante Hinführung auf die Axiome stören würde, dann auch weil bei der Erarbeitung der Aussagen über abgeschlossene Mengen bereits das sichere Umgehenkönnen mit den Axiomen (01) bis (03) erforderlich ist.

Ist eine Hinführung auf die Definition nötig, so wird man an den Begriff abgeschlossenes Intervall anknüpfen. Auch abgeschlossene Kreisscheiben sind dem Schüler bereits ein Begriff (siehe Frage 6 in Abschnitt 2.1.1). Von den Intervallen her weiß der Schüler, daß nicht-offene Intervalle nicht zwangsläufig abgeschlossene sein müssen, sondern daß es auch halboffene Intervalle gibt. erinnert man ihn hieran, so ist es leicht, ihn von falschen Vorstellungen abzubringen. Die allgemeine Definition abgeschlossener Mengen selbst wird er nicht ohne Hilfe finden können.

So verhält sich der Lehrer methodisch richtig, wenn er die Definition nach einer kurzen Einleitung selbst vor- gibt. Danach sollte dem Schüler einsichtig gemacht werden, daß die Definition "vernünftig" ist. Als "vernünftig" wird er sie ansehen, wenn die vorher gesammelten Bezeichnungen "abgeschlossenes Intervall" und "abgeschlossene Kreisschei- be" auch nach der Definition 5 zurecht stehen. Für das "abgeschlossene Intervall" muß hierzu gezeigt werden, daß das Komplement eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist. Dies folgt wegen Aufgabe 8 und nach Axiom (O2). Für das Komplement der ab- geschlossenen Kreisscheibe war in Aufgabe 5 gezeigt worden, daß es in $\mathbb{I}$ offen ist. Abgeschlossenes Intervall und ab- geschlossene Kreisscheibe sind also auch nach Definition 5 abgeschlossen in den Räumen $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ bzw. $(\mathbb{I}, \gamma_{\mathbb{I}})$.

Nun wird die Definition 5 auch auf ein endliches Beispiel angewandt. Ist die Menge M endlich, so ist auch die Menge γ endlich und es kann ohne weiteres die Menge aller Komplemen- tärmengen offener Mengen aufgeschrieben werden. So hat man rasch einen Überblick über alle abgeschlossenen Mengen des betreffenden topologischen Raumes. Dies ist eine Aufgabe, die die Schüler im Anschluß an das Beispiel 5 leicht selbst lösen können. (Aufgabe 20a)

Aufgabe 20b soll bewirken, daß die Schüler die Aussage des folgenden Satzes 1 vermuten, wodurch sie für den all- gemeinen Beweis dieses Satzes motiviert werden. Für Satz 1 wurde bewußt die Aussage "der Durchschnitt z w e i e r Mengen ist wieder abgeschlossen" gewählt und nicht un- mittelbar die Aussage (A2) von S.80, um die Schwierigkeit des Gebrauchs des Zeichens " $\cap$ " von der des Verstehens der Beweisidee zu isolieren. Die Erweiterung auf beliebig viele abgeschlossene Mengen (siehe A2), könnte dann zu-

sätzlich zu Aufgabe 21 von den Schülern verlangt werden. Der Beweis des Satzes 1 wurde gerade im Hinblick auf einen Leser, der ohne Hilfe eines Lehrers auskommen muß, sehr ausführlich wiedergegeben. Bei Verwendung der üblichen Symbole nimmt derselbe Beweis nur wenige Zeilen ein. Diese kürzeste Form kann dann der Schüler selbst für den Beweis der Aussage (2) des Satzes, welcher in Aufgabe 21 verlangt wird, anstreben.

Die dann folgende Sammlung der Aussagen (A1) bis (A3) ist für den späteren Kursverlauf nötig (siehe z.B. Hüllenbildung). (A1) folgt rasch aus der Definition von $c\mathcal{A}$ und (A3) wurde in Aufgabe 21 bewiesen. (A2) kann als Erweiterung des Beweises von Satz 1 ohne Mühe gewonnen werden (siehe meine obigen Ausführungen).

Zusätzlich ist zu sagen, daß im Kurs nicht auf den Beweis der Äquivalenz der beiden Axiomensysteme (O1) bis (O3) und (A1) bis (A3) hinsichtlich der Definition topologischer Räume abgezielt wurde¹⁾; denn für den Aufbau des Kurses ist diese Äquivalenz nicht wesentlich. Gibt man sich allerdings als Hauptziel²⁾ vor, den Schüler mit dem Wesen der Axiomatik vertraut zu machen, so ist es eine bemerkenswerte Tatsache, daß es mehrere unterschiedliche Axiomensysteme geben kann,

1) Zum Beweis dieser Äquivalenz müßte zusätzlich bewiesen werden:

Sei M eine Menge und $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(M)$ mit den Eigenschaften

$$(A1) \quad \emptyset \in \mathcal{A} \wedge M \in \mathcal{A}$$

$$(A2) \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$$

$$(A3) \quad A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$$

Dann ist $(M, c\mathcal{A})$ ein topologischer Raum. $\mathcal{A}$ heißt dann die Menge der abgeschlossenen Mengen des topologischen Raumes.

2) Im vorliegenden Kurs ist dies allerdings nicht geschehen, siehe Kapitel 1.3, S. 35 ff

die dasselbe mathematische Gebilde definieren. Bisher hatte der Schüler in keiner Disziplin des Mathematikunterrichtes Gelegenheiten, Ähnliches zu sehen. Da die Einsicht dem Durchschnittsschüler große Mühe macht, kann man allerdings mit Recht den Standpunkt vertreten, daß diese dem Mathematikstudenten vorbehalten bleiben sollte. Schließlich gehört eine derartige Erkenntnis zum Verständnis der mathematischen Grundlagenforschung. Bei genügender Offenheit des Lehrstils kann es aber durchaus geschehen, daß der Lehrer erlebt, was in einer meiner Versuchsklassen geschah. Ein Schüler erkannte von selbst, ohne Anregung von meiner Seite, daß eine Dualität zwischen dem Axiomensystem (O1) bis (O3) und dem System von Aussagen (A1) bis (A3) besteht. Hier muß bemerkt werden, daß dieser Schüler wohl mit dem Prädikat überdurchschnittlich beurteilt werden muß, was sein Mathematikverständnis anbetrifft, und daß diese Erkenntnis beim Schüler zwar intuitiv vorhanden war, aber nicht völlig befriedigend ausgedrückt werden konnte. Immerhin ist es bemerkenswert, daß Schüler von selbst auf die Dualität der beiden Axiomensysteme stoßen können.

In Aufgabe 22 wird nochmals provoziert, zu sehen, daß es in topologischen Räumen Mengen geben kann, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind. Damit wird nochmals betont, daß die Topologie die beiden Begriffe nicht als Alternativen versteht. Wurde die Kreativität der Schüler im zurückliegenden Mathematikunterricht gefördert, so wird er bereits nach Bearbeitung der Aufgabe 20 ohne äußeren Anstoß versucht haben zu ergründen, ob es eine Bedingung dafür gibt, wann Mengen in einer Topologie sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Dies zu tun schlägt Aufgabe 23 vor. Die zu Aufgabe 22 gehörende Tabelle 1 wird auf S. 82

zum Vergleich mit der dortigen Tabelle 2 gebraucht; somit soll Aufgabe 22 nicht ausgelassen werden. Die Gefahr, daß der Schüler die Begriffe "nicht-offen" und "abgeschlossen" verwechselt, besteht zwar inhaltlich nicht mehr, die Fragestellungen von Aufgabe 24 sind jedoch trotzdem für den Schüler nicht trivial. Dies kommt - so meine Erfahrung - daher, daß das sichere Umgehen mit Teilmengen der Potenzmenge nicht allen Schülern leicht fällt.

Es war mir ein Anliegen, bereits im Abschnitt über abgeschlossene Mengen auch auf die abgeschlossene Hülle einer Menge einzugehen. Definiert man diese als kleinste abgeschlossene Menge, die die gegebene Menge enthält, so hat der Begriff "abgeschlossene Hülle" an dieser Stelle seinen richtigen Platz. Für den Gesamtablauf des Kurses ist der Begriff "abgeschlossene Hülle" wichtig. Er wird z.B. zur Definition des Randes einer Menge wieder gebraucht. Didaktisch wichtig ist, daß dieser Begriff Gelegenheit gibt, Brücken zwischen Anschauung und abstrakter Theorie zu schlagen. Derartige Brücken sind meines Erachtens für die schulische Durcharbeitung einer mathematischen Theorie sehr wichtig, denn für viele Schüler bedeutet dies ein Haltfinden an Bekanntem, konkretem beim Erarbeiten von Abstraktem.

Die Einführung der abgeschlossenen Hülle geschieht nach folgendem methodischen Konzept. Tabelle 1 (S. 81) führt vor Augen, daß jeder offenen Menge eines topologischen Raumes in natürlicher Weise eine abgeschlossene Menge zugeordnet ist, nämlich ihr Komplement. Es soll nun auf den Gedanken hingeführt werden, daß jeder offenen Menge durch eine andere Zuordnung ebenfalls genau eine abgeschlossene Menge zugeordnet ist, nämlich ihre abgeschlossene Hülle. Daß diese Zuordnung sogar jeder Teilmenge eines topologischen Raumes ihre abgeschlossene Hülle zuordnet, soll hier

zunächst unterdrückt werden, da sonst der Vergleich der Zuordnungen $A \mapsto A'$ mit $A \mapsto \bar{A}$ nicht herangezogen werden könnte (für nicht offene A ist ja A' keine abgeschlossene Menge).

Die Zuordnung $A \mapsto \bar{A}$ soll nun als solche erst an einem speziellen Beispiel entdeckt werden (Tabelle 2), denn $\bar{A}$ ist ja erst zu definieren.

In $(\pi, \mathcal{T}_\pi)$ wird entdeckt, daß $\bar{K}(z, g)$ abgeschlossene Obermenge von $K(z, g)$ ist und dabei wird intuitiv der Begriff "kleinste" abgeschlossene Obermenge geprägt. So ist zunächst die Definition der kleinsten Menge in einer Menge von Mengen einzuschleiben und an mehreren Beispielen einzuüben. Der Begriff "kleinste Menge" ist unabhängig von topologischen Begriffen "offen", "abgeschlossen". Die Beispiele sind so gewählt, daß der Schüler dies bemerken kann. Die Fußnote auf S. 83 weist ihn auch ausdrücklich daraufhin, daß nicht jede Menge von Mengen eine kleinste haben muß.

Ohne Beweis wird die Bemerkung angefügt, daß - sofern eine kleinste Menge existiert - diese in einer Menge $\mathcal{M}$ von Mengen durch Durchschnittsbildung ermittelt wird. Die Begründung:

$$\bigcap \mathcal{M} \subseteq A_i \quad \text{für alle } A_i$$

wird mündlich kurz besprochen und leuchtet den Schülern nach dem Umgang mit den Beispielen ein.

Nun wird zielstrebig auf die Anwendung des Begriffs "kleinste" auf die Menge aller abgeschlossenen Obermengen einer gegebenen Menge hingearbeitet. Hierzu erschien mir eine Aufgabe über eine endliche Topologie, die alle nötigen Denkschritte besonders transparent erscheinen läßt (z.B. weil die Menge aller abgeschlossenen Obermengen von B endlich ist), gut geeignet. Die kleinste abgeschlossene

Menge, die B enthält, bekommt dann die Bezeichnung "abgeschlossene Hülle von B". Der anschließende Lückentext stellt eine nützliche Übung zu diesem Begriff in den Räumen $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ dar. Er suggeriert auch sprachlich, daß es von der verwendeten Topologie abhängt, welche Menge die abgeschlossene Hülle von B ist. Mehr Beispiele zu dieser Tatsache folgen dann erst im Kapitel 2.4.1, wo die abgeschlossene Hülle von B sich als identisch mit der Vereinigungsmenge aus B und der Menge aller Häufungspunkte von B erweist.

Da in diesem Zusammenhang die Aussage des Satzes 2 zum Beweis herangezogen werden wird, wurde dieser noch eigens aufgeführt, obwohl er zum Teil nur eine Anwendung der auf Seite 83 gebrachten allgemeinen Aussage über die kleinste Menge in einer Menge von Mengen ist. Der Beweis der Aussagen 1) und 2) auf S. 85 belegt, daß $\mathcal{A}$ überhaupt ein kleinstes Element enthält.

Der Gebrauch des $\cap$ -Zeichens ist bereits eingeübt (siehe S. 69/70). Allerdings ist die Verwendung der Menge von Mengen selbst als Indexmenge für den Schüler ungewöhnlich. Der Index i bei A_i ist darin eigentlich überflüssig, für den schwächeren Schüler baute ich ihn aber trotzdem als Stütze für das Verständnis ein. Die Menge $\mathcal{A}$ wird natürlich nicht als abzählbar vorausgesetzt. Meine Erfahrung mit der auf S. 85 gebrauchten Schreibweise ist die, daß vor allem das häufige bewußte "Lesen"¹⁾ der Schreibweise, diese dem Schüler verständlicher macht. Die richtige Einstellung

1) Das Bedürfnis hierfür zu wecken ist ein methodisches Problem, das von Fall zu Fall - also vom Inhaltlichen her - gelöst werden muß.

zu solchen Kurzschreibweisen wird meiner Meinung nach in der Mittelstufe (Sekundarstufe I) erworben. Allerdings stellt sie auch dort eine didaktische Aufgabe dar, die nicht leichtfertig abgetan werden sollte. Erscheinen dem Lehrer die mit dem Gebrauch des Zeichens $\cap$ verbundenen Schwierigkeiten zu groß, so kann er auch bei der wörtlichen Formulierung bleiben.

3.2.2 Zu: 2.2.2 Basis einer Topologie

Auf den Begriff "Basis einer Topologie" wird man in einem Topologiekurs nur ungern verzichten wollen. Die Kenntnis handlicher Basen einiger Topologien (wie z.B. $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) gibt eine übersichtlichere Vorstellung von der besonderen Struktur des jeweiligen topologischen Raumes. Das Verständnis der metrischen Räume als topologische Räume fußt auf dem Begriff Basis. Ferner hängt der für Konvergenzuntersuchungen wichtige Begriff der Umgebungsbasis eines Punktes mit dem Begriff Basis einer Topologie zusammen (siehe Satz 9 auf S. 118)

Alle diese Argumente sprechen für eine Aufnahme des Begriffs Basis in die Reihe der in einem Topologiekurs zu behandelnden Begriffe. Man wird den Begriff Basis auch möglichst frühzeitig in einem solchen Kurs einführen, um von den Vorteilen der Anwendung des Begriffs so bald als möglich zu profitieren. Der Begriff Basis muß natürlich an Beispielen eingeübt werden. Dabei sind die Schüler nach meiner Erfahrung für die Suche von Basen für $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ besonders motiviert.

Dabei läßt es sich gut einrichten, eine Basis einer Topologie neu vorzustellen, die eine von der natürlichen verschiedene Topologie auf $\mathbb{R}$ erzeugt.

Diese neue Topologie auf $\mathbb{R}$ ist eine nicht-hausdorffsche; somit ergibt sich ebenfalls zwanglos eine Überleitung zu einer kurzen Besprechung der Definition hausdorffscher Räume. Damit schließt das Kapitel.

Da ich mich laut Kapitel 1.1 und 1.4.2 für den vorliegenden Kurs grundsätzlich dem induktiven Weg verschrieben habe, soll die Definition des Begriffs "Basis einer Topologie" nicht einfach an den Anfang des Kapitels 2.2.2 gestellt werden, wie es in den Mathematik-Studienbüchern geschieht. Die Hinführung auf die Definition benützt das Beispiel einer endlichen Topologie auf einer endlichen Menge. Es wird an eine frühere Aufgabe angeknüpft, in der ebenfalls von einer Subbasis (diese Bezeichnung wurde allerdings nicht gebraucht, siehe Wortlaut der Aufgabe 14, Seite 76) ausgehend die zugehörige Topologie erzeugt wird. Wird diese Erzeugung geschickt durchgeführt - und das erfährt der Schüler beim Lösen z.B. der Aufgabe 14 selbst - so ermittelt man erst alle Durchschnitte von Mengen der Subbasis und erweitert die Subbasis um diese Durchschnittsmengen. Die so entstandene Menge stellt eine Basis der schließlich zu erzeugenden Topologie dar, was allerdings noch nicht erwähnt wird. Die entstandene Menge von offenen Mengen wird stattdessen mit $(**)$ gekennzeichnet. Es gilt nun deutlich zu machen, daß man von $(**)$ zur Topologie allein dadurch kommt, daß man alle Vereinigungsmengen von beliebig vielen Mengen aus $(**)$ zu $(**)$ hinzunimmt. Die so bereitgestellten drei Mengen $(*)$, $(**)$, $(***)$ werden nun nebeneinandergehalten und auf die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen geachtet. Die Schüler sehen: $(*) \subseteq (**) \subseteq (***)$
Die Beziehung $(**)$ zu $(***)$ ist jedoch abgesehen von der Teilmengenbeziehung anders als die von $(*)$ zu $(***)$. Dies soll der Schüler erkennen. Dann wird ihm bemerkenswert erscheinen, daß jede Menge aus $(***)$ sich als Vereinigungsmenge von Mengen aus $(**)$ aber nicht von Mengen aus $(*)$ darstellen läßt. Dadurch ist die Beziehung

(**) zu (***) als etwas Besonderes erkannt. Der Unterrichtsablauf ist reif für die Definition 7 (des Begriffs "Basis einer Topologie"). Beispiele, die auf die Definition folgen, stellen heraus, daß es mehrere Basen einer Topologie geben kann und daß andererseits nicht jede Teilmenge einer Topologie eine Basis dieser Topologie ist.

Im Unterrichtsgespräch sollte auch erwähnt werden (siehe Fußnote im Schülerbuch S. 87) inwiefern sich die Begriffe "Basis einer Topologie" und "Basis eines Vektorraumes" unterscheiden. Sobald die Bezeichnung "Basis" fällt, kann daran erinnert werden, daß dieses Wort bereits einmal im früheren Mathematikunterricht verwendet wurde. Die Schüler empfinden nach meiner Erfahrung die Verschiedenheit im Gebrauch des Wortes Basis in den beiden obigen Begriffen sehr stark, so daß eher keine Analogie gesehen wird. Der Schüler sieht: Einerseits Konstruktion von Elementen des Vektorraumes durch Linearkombination von Elementen der Basis, andererseits Konstruktion von Elementen der Topologie durch Vereinigung von Elementen der Basis. Einen wesentlichen Unterschied zwischen einer Basis einer Topologie und einer Basis eines Vektorraumes fällt dem Schüler nicht ohne Hilfe auf: er betrifft die Eindeutigkeit der Darstellung durch die Basiselemente. Die Elemente einer Topologie können u.U. auf mehrere verschiedene Arten als Vereinigung von Elementen einer Basis dargestellt werden, für die Elemente eines Vektorraumes ist die Darstellung mit Hilfe einer vorgegebenen Basis einzig.

Die Aufgaben 27 und 28 verlangen Ermittlung von Basen für eine gegebene Topologie bzw. Ermittlung einer Topologie für eine vorgegebene Basis. Man mag bei letzterer

Aufgabenstellung anmerken, daß sie offener sein sollte, z.B.: Ermittlung - sofern möglich - von Topologien zu einer vorgegebenen Menge, die dann Basis jeder gefundenen Topologie sein soll. Damit würde man zwei Erkenntnissen noch mehr Entdeckungsspielraum lassen, nämlich daß nicht jede Menge von Mengen so beschaffen ist, daß sie Basis irgendeiner Topologie sein kann, und daß - wenn es überhaupt eine solche Topologie gibt - es genau eine gibt. Für ein Schülerbuch, das auch für das Selbststudium geeignet sein soll, wäre bei einer derartig offenen Aufgabenstellung viel mehr Beispielmateriale nötig; das Kapitel "Basis" würde viel umfangreicher. Die zur Verfügung stehende Gesamtzeit diktierte mir hier Beschränkung auf. Ich möchte es aber einem Lehrer, der den Kurs nachvollzieht, raten, im Unterricht wenn zeitlich möglich, die offenere Fragestellung vorzuziehen. Man bedenke hierzu auch, daß die Erarbeitung der allgemeinen Eigenschaften von Basen von Topologien davon profitiert.

Die Eigenschaften 1), 2), 3) sind ihrer Bedeutung für die Aussagen über topologische Räume nach unterschiedlich. 1) und 3) sind als notwendige Bedingungen dafür wichtig, wann eine Menge von Mengen überhaupt Basis einer Topologie auf M sein kann. Während die Gültigkeit von 1) unmittelbar einsichtig ist, müßte 3) eigentlich allgemein bewiesen werden. Da von dieser Eigenschaft aber im weiteren Verlauf des Kurses nicht unmittelbar Gebrauch gemacht wird (für $\mathcal{P}$ auf S. 90 könnte sie angewendet werden, dies umgehe ich aber indem ich für die Menge $\mathcal{X}$, die mit Hilfe von $\mathcal{P}$ erzeugt wird, die Axiome (O1) bis (O3) nachprüfe), unterlasse ich den Beweis aus Zeitgründen. Da die Eigenschaft dann aber wenigstens an einem nicht trivialen Beispiel offensichtlich geworden sein soll,

verweise ich auf die Seite 90. Dies ist nötig, da die vorangegangenen Beispiele (siehe S. 86) von Basen die eingengte Aussage nahelegen: $\mathcal{B}$ enthält zu allen $B_i \in \mathcal{B}$ alle Durchschnitte von je zwei Elementen. Diese Aussage gilt nicht allgemein für alle Basen von Topologien. Das sieht der Schüler erst an der Basis $\mathcal{K}$ von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ (der Durchschnitt zweier offener Kreisscheiben muß selbst nicht wieder eine offene Kreisscheibe sein). Deshalb bringe ich auf S. 88 zunächst nur den Hinweis, daß es noch eine dritte wichtige allgemeine Eigenschaft für Basen von Topologien gibt.

Eigenschaft 2 ist von anderer Art als 1) und 3). Sie befaßt sich mit der oben besprochenen eindeutigen Bestimmtheit der Topologie durch eine Basis. Wie auf S. 88 gesagt wird, ist diese Aussage wichtig für das spätere Kapitel Abbildungen topologischer Räume. Auf S. 86 bei der Erzeugung der Topologie aus einer Subbasis (und einer Basis) und bei der Bearbeitung von Aufgabe 28 werden Erfahrungen zu Eigenschaft 2 gemacht. Allerdings wird die eindeutige Bestimmtheit der Topologie durch den Schüler - so meine Erfahrung - nicht in Zweifel gezogen, so daß er ohne entsprechenden Hinweis die Eigenschaft 2 gar nicht für bemerkenswert erachtet. Hinweischarakter kann hier bereits die Aussage "Zu einer Topologie kann es mehrere Basen geben" haben, denn dann ist der Schüler versucht, die Worte "Topologie" und "Basis" darin auch zu vertauschen. In der Folge wird Eigenschaft 2 rasch von den Schülern selbst formuliert.

Bereits auf S. 64/65 waren wir versucht, die Aussage des Satzes 3 einzubauen, ohne daß dort das Wort Basis hätte verwendet werden müssen. In den Definitionen 1, 2 und 3

werden die offenen Mengen in $\mathbb{I}, \mathcal{O}$ bzw. $\mathbb{R}$ ja mit Hilfe von Elementarkugeln definiert. Weshalb dann nicht unmittelbar im Anschluß an diese Definitionen die Aussage bewiesen wird: jedes $X \in \mathcal{T}_{\mathbb{I}}(\mathbb{R} \text{ bzw. } \mathcal{O})$ läßt sich als Vereinigungsmenge von Elementarkugeln aus $\mathbb{I}(\mathbb{R} \text{ bzw. } \mathcal{O})$ darstellen, wurde S. 240 begründet. Beispiele aus den angesprochenen Räumen haben den Schüler im bisherigen Kursverlauf allerdings mit dieser Aussage sehr vertraut gemacht. So vertraut (natürlich nur anschaulich begründet), daß er beinahe die Beweisnotwendigkeit nicht mehr empfindet. Die Vertrautheit mit diesen topologischen Räumen könnte eventuell auch den Gedanken nahelegen, das intuitive Erfassen der Beziehungen " $\mathcal{K}_{\mathbb{I}}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ " " $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ", " $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ ist Basis von $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ " ($\mathcal{K}_{\mathbb{I}}$: Menge aller offenen Kreisscheiben in $\mathbb{I}$; $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ und $\mathcal{K}_{\mathcal{O}}$ entsprechend) zur Hinführung auf die Definition 7 (Basis einer Topologie) zu verwenden. Die große Vertrautheit spricht jedoch hier im Zusammenhang mit der Einführung des Begriffs "Basis" gerade gegen diese Beispiele. Für das Erkennen der Beziehung "Basis-Topologie" ist ein etwas größerer Abstand des Betrachters vom Beispiel vorteilhafter. Außerdem würde der bis hierher 33 Seiten umfassende Kurs durch eine einseitige Überbetonung der Beispiele aus $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, $(\mathbb{I}, \mathcal{T}_{\mathbb{I}})$ und $(\mathcal{O}, \mathcal{T}_{\mathcal{O}})$ möglicherweise von der Topologie einen falschen Eindruck hinterlassen.

Das Nachvollziehen des Beweises des Satzes 3 macht dem Schüler inhaltlich keine Schwierigkeiten. Eventuell muß die Kenntnis wieder aufgefrischt werden, daß $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$. Dieses Unterfangen ist sowohl hinsichtlich der durch den Topologiekurs angestrebten allgemeinen Lernziele wichtig, als auch wichtig für den weiteren Verlauf des Kurses, da damit eine notwendi-

ge Fertigkeit bereitgestellt wird. Die Schreibweise der Beweisschritte stellt keine Hürde für den Schüler dar, nachdem er im zurückliegenden Kurs behutsam und intensiv auf den Gebrauch des $\cup$ -Zeichens vorbereitet wurde (siehe S. 69/70). Die Wahl der Menge M selbst als Indexmenge weist den Punkten p die Rolle von Indizes zu, daran muß sich der Schüler erst gewöhnen. Wie auf S. 271 bereits bemerkt, hilft hier das bewußte Lesen - also das wörtliche Ausformulieren des abgekürzt Dargestellten.

Nun kann es dem Schüler selbst als Übungsaufgabe überlassen werden, andere Mengen von offenen Mengen aus π als Basen von γ_π zu entdecken (und zu beweisen). Für Aufgabe 29 erschien es mir allerdings noch angebracht, eine kleine Hilfestellung in Form des Hinweises (siehe Seite 90) zu geben. Dadurch will ich verhindern, daß die Aussage " Q ist Basis von γ_π " allein mit Hilfe der Anschauung gewonnen wird. Der Schüler ist nämlich nach meiner Erfahrung bei dieser Aussage schnell bereit, sie ohne Beweis als anschaulich klar hinzunehmen. Hier soll der Lehrer durch eine Bemerkung, ob denn gesichert sei, daß auch ja keines der Quadrate um einen der Punkte aus der offenen Menge "herausrage", nachdenklich stimmen. Mit dem Beweis und dem Auffinden weiterer Basen von γ_π haben die Schüler keine Schwierigkeiten. Es dürfte den Didaktiker nicht erstaunen, daß von den Schülern als weitere Basen ausschließlich Mengen regelmäßiger ebener Figuren (aufgefaßt als offene Mengen) genannt werden.

Für Q war der Nachweis für $Q \subseteq \gamma_\pi$ (jede Basis ist laut Definition Teilmenge der Topologie, die sie erzeugt) unnötig, da in der Festlegung von Q bereits von den offenen Quadraten gesprochen wird.

Am darauffolgenden Beispiel lernt der Schüler, daß nicht jede Teilmenge von $\mathcal{T}_\pi$ Basis von $\mathcal{T}_\pi$ ist. Die Menge $\mathcal{P}$ aller offenen Parallelstreifen (parallel zur Gerade G) ist tatsächlich - siehe Aufgabe 4 von S. 59 - eine Teilmenge von $\mathcal{T}_\pi$. $\mathcal{P}$ erfüllt die Eigenschaften 1 und 3 (S. 88) also die notwendigen Bedingungen¹⁾, die eine Menge erfüllen muß, um Basis einer (noch zu bestimmenden) Topologie auf π sein zu können. Aber es stellt sich nun heraus, daß die mit $\mathcal{P}$ als Basis erzeugte Topologie auf π nicht $\mathcal{T}_\pi$ ist. Man findet leicht offene Mengen aus $\mathcal{T}_\pi$, die nicht als Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{P}$ dargestellt werden können. $\mathcal{P}$ ist die Basis einer neuen Topologie auf π , die im Kurs mit $\mathcal{O}$ bezeichnet wird. Es zeigt sich, daß $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}_\pi$.

Nachdem bereits im zurückliegenden Kursablauf auch $\mathbb{R}$ mit anderen als der natürlichen Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ausgestattet worden war, ist der Schüler von $\mathcal{O}$ nicht befremdet. $\mathcal{O}$ hat gegenüber der Topologie der kofiniten Teilmengen von $\mathbb{R}$ (S.77) den Vorzug eine von $\mathcal{T}_\pi$ verschiedene aber trotzdem anschauliche Topologie zu sein.

Die Sprechweise "die Streifentopologie" wird von den Schülern selbst als ungenau erkannt. Es gibt zu jeder Klasse paralleler Geraden je eine Streifentopologie. Wir haben also unendlich viele neue Topologien auf π entdeckt.

1) Da im Schülerbuch kein allgemeiner Beweis dieser notwendigen Bedingungen aufgenommen worden ist, wird stattdessen untersucht, ob die Menge aller Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{P}$ die Axiome (O1) bis (O3) erfüllt.

Jede dieser Streifentopologien ist gröber als die natürliche Topologie von $\mathbb{R}$. Untereinander sind sie nicht vergleichbar.

Die Verschiedenheit der Streifentopologie zur Topologie $\mathcal{T}_\pi$ kann nun dazu verwendet werden, induktiv (d.h. hier zwanglos) auf die Definition der Eigenschaft "hausdorffsch" bei topologischen Räumen hinzuführen.¹⁾ Aus diesem Grund kommt die Definition 8 (S. 93) im Kapitel "Basis einer Topologie" vor. Für eine ausführlichere Behandlung aller Trennungsaxiome und der mit ihnen zusammenhängenden Aussagen ist nicht genügend Zeit im vorliegenden Kurs. Da jedoch der Schüler meiner Meinung nach wenigstens die Klassifizierung topologischer Räume nach einem Trennungsaxiom einmal gesehen haben sollte, zog ich das hausdorffsche unter den Trennungsaxiomen vor. Dies vor allem im Hinblick auf Satz 12 (S. 140) im Kapitel "Konvergenz von Folgen". Wenn man sich für einen Topologiekurs entschieden hat, so gibt es sicher Themen, die man vom Standpunkt der mathematischen Allgemeinbildung her in einem solchen Kurs nicht missen möchte. Als ein solches Thema sehe ich die Bemerkung auf S. 134 und Satz 12 (S. 140) an und demzufolge die Definition 8 (S. 93).

Wenn davon gesprochen wurde, daß die Gegenüberstellung von $\mathcal{T}_\pi$ und $\mathcal{T}_G$ zur induktiven Herleitung von Definition 8 der Eigenschaft "hausdorffsch" dient, sollte dies nicht mißverstanden werden. Ohne Hilfe wird der Schüler die besagte Trennungseigenschaft nicht erfassen. Deshalb sind die Aufgaben 30 und 31 so gestellt, daß der Schüler bei ihrer Bearbeitung planmäßig den Unterschied zwischen hausdorffschen und nicht-hausdorffschen Räumen erkennen muß und richtig formulieren kann.

1) Siehe hierzu auch die allgemeine Begründung auf S. 47a

Bei der Aufgabenstellung ist zudem darauf geachtet worden, daß zunächst die Angaben so konkret wie möglich vorliegen (deshalb die Abstandsangabe von 2 cm der Punkte x und y , die auf einer gegebenen Geraden G liegen sollen). Die didaktische Bedeutung dieses Vorgehens wurde bereits in 1.4.2 begründet. Der bearbeitende Lehrer muß sich bei dieser Lernsequenz nicht unbedingt streng an das Schülerbuch halten, das die Definition 8 nach der Aufgabe 30, aber vor Aufgabe 31 bringt. Er kann z.B. die Impulse so setzen, daß die Schüler selbst den Inhalt von Aufgabe 31 als Problem aufwerfen. Dazu wird er weit weniger derbe Denkanstöße geben als sie im Schülerbuch nötig sind, welches an dieser Stelle gezwungen ist, stärker den Charakter eines Lernprogrammes anzunehmen. Allerdings sollte der Lehrer dem methodischen Grobkonzept dieses Abschnittes treu bleiben. Ein anderes, jedoch weil nicht induktives, abzulehnendes methodisches Vorgehen würde wie folgt aussehen: Man weist darauf hin, daß sich $\mathcal{T}_x$ und $\mathcal{O}_G$ auch in der Eigenschaft "hausdorffsch" unterscheiden und nimmt dies unmittelbar zum Anlaß, die Definition dieses Begriffes zu bringen. Danach verifiziert man, daß $\mathcal{T}_x$ hausdorffsch ist und $\mathcal{O}_G$ nicht. Nicht nur weil ich mich prinzipiell für ein induktives Vorgehen entschieden habe, erscheint mir dieser Weg dem im Schülerbuch vorgezeichneten unterlegen. Man muß dazu beachten, daß die Definition all Existenzquantoren enthält. Dies stellt bekanntlich für den Schüler eine gewisse Hürde dar (siehe etwa die in der Schule gebräuchliche Konvergenzdefinition in $\mathbb{R}$). Deshalb wird in Aufgabe 30 stufenweise auf die allgemeine Formulierung der Trennungseigenschaft hingeführt. Dabei werden die Existenzquantoren bereits auf der ersten Stufe (Aufgabe 30a) erarbeitet; die Allquantoren kommen erst auf Stufe 2 und 3 durch schrittweises Aufgeben der Spe-

zialisierungen in die Formulierung der sich verändernden Aussage hinein. Auf der 3. Stufe wird die Spezialisierung auf einen bestimmten topologischen Raum nämlich $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ aufgegeben, man ist bei der Definition der Trennungseigenschaft angelangt.

Hat man nicht ohnehin die Fragen der Aufgabe 30 parallel für $(\mathbb{R}, \tau_G)$ mitbearbeitet, so wird dies mit Aufgabe 31 jetzt nachgeholt. Wenn Aufgabe 31 wie im Skriptum nach der Definition 8 steht, so stellt sie eine Kontrolle dar, ob sich der Schüler die Definition auch wirklich angeeignet hat. Für ein (eventuell paralleles) Behandeln von Aufgabe 30 und 31 vor der Definition 8 spricht eine allgemein anerkannte mathematisch-didaktische Lehrmeinung, die von M. Häußler ¹⁾ sogar als mathematik-didaktisches "Axiom" bezeichnet wurde: Für eine Eigenschaft E sollte im Unterricht erst dann eine eigene Bezeichnung eingeführt werden, wenn der Schüler sowohl Beispiele für E wie solche für $\text{Non}E$ kennengelernt hat. Schwächt man dieses Prinzip ab, so fordert man: Vor der Einführung einer eigenen Bezeichnung für E sollte der Schüler mindestens ein Beispiel für E kennengelernt haben und nach der Einführung der Bezeichnung sollte er wenigstens ein Beispiel für $\text{Non}E$ kennenlernen.

Die Schüler begründen als Übung weshalb $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ einen Hausdorff-Raum darstellt. Ferner ist es gut, wenn sie sich auch mit einer nicht-hausdorffschen Topologie auf $\mathbb{R}$ befassen. Die Reihe der Beispiele soll dann noch durch Topologien auf endlichen Mengen vertieft werden. Nach eigenem Probieren sollten die Schüler auf die Aussage kommen, die als Aufgabe 32 zu beweisen ist.

1) M. Häußler: "Primat der Didaktik - aber Vetorecht der Methodik?" in: Didaktik der Mathematik, Heft 3/ 1973 S. 165 - 173.

3.2.3 Zu: 2.2.3 Metrische Räume

Bevor das methodische Vorgehen des folgenden Abschnitts "Metrische Räume" näher erörtert wird, ist es nötig, über die grundsätzliche Stellung dieses Themas innerhalb des Topologie-Lehrgangs zu reflektieren. In gängigen Werken zur Topologie werden metrische Räume meist ganz an den Anfang gestellt. Ein Grund dafür ist sicher, daß sich die Topologie im Laufe der Mathematikgeschichte aus Untersuchungen über metrische Räume entwickelt hat.¹⁾ Dem Beispiel der einschlägigen Fachliteratur folgend, könnte der Planer eines Topologiekurses für das Gymnasium ebenfalls die Behandlung metrischer Räume der Behandlung topologischer vorschalten. Gründe wären das Vorliegen bekannter Modelle ($\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ und $\mathbb{G}$ mit der üblichen Distanzfunktion) und auch die Tatsache, daß eine "Vorstufe" der Verallgemeinerung Hilfe für das Begreifen der noch allgemeineren topologischen Räume sein könnte. Trotzdem wurde im vorliegenden Kurs die Behandlung allgemeiner metrischer Räume nicht an den Anfang gestellt. Dem lagen folgende didaktisch-methodischen Überlegungen zugrunde: Die Einführung der Axiome des metrischen Raumes bedarf wie die der Axiome des topologischen Raumes einer sorgfältigen methodischen Aufarbeitung. Im Fall des metrischen Raumes liegt das daran, daß die drei aus der Elementargeometrie bekannten metrischen Räume dem Schüler so vertraut sind, daß er die den Axiomen entsprechenden Eigenschaften nicht als auffallend bemerken wird. Zudem sind die drei Räume jeweils zueinander Ober- bzw. Unterraum, zehren also von ein und derselben Distanzfunktion. Soll der Schüler allgemeine Eigenschaften von Distanzfunktionen "entdecken", so mußte er mindestens eine weitere von der obigen

1) Siehe Einleitung zu Grotemeyer, K.P.: Topologie. B.-I.-Hochschulschriften 836/836a, Mannheim 1969 sowie Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen 1971

verschiedene Distanzfunktion kennen oder vorgestellt bekommen. Es gibt somit keinen mühelosen Weg zu den Axiomen des metrischen Raumes. Bei diesen angelangt, würde man allerdings auch nicht lange verweilen, ist es doch das Ziel, allgemeine topologische Räume zu erarbeiten. Aus praktischen Erwägungen wird man auch nicht Definitionen und Aussagen für metrische Räume formulieren, die dann allgemeiner für topologische Räume nochmals aufzustellen sind, obwohl das natürlich möglich wäre. So bliebe die Beschäftigung mit metrischen Räumen zu Beginn des Topologiekurses immer nur Durchgangsstation. Das muß die dafür aufgewandte Mühe in Frage stellen. Deshalb wurde im vorliegenden Kurs die Behandlung metrischer Räume nicht an den Anfang gestellt.

Die Frage erhebt sich, ob sie dann zurecht an der gegenwärtigen Stelle des Kurses steht. Wirft doch auch hier das Kennenlernen eines weiteren Axiomensystems die oben geschilderten methodischen Probleme auf. Der Hauptgrund, weshalb nicht auf die Behandlung der metrischen Räume verzichtet werden sollte, ist der, daß der Schüler hier die Gelegenheit hat, die Ablösung des Begriffs Raum vom Anschaulichen intensiv zu erleben. Hilfe ist ihm dabei, daß die Ablösung weniger krass vor sich geht als bei den topologischen Räumen. Immerhin kann er sich noch von der Anschauung unterstützte, schematische Darstellungen der Abstandsverhältnisse in manchem der betreffenden Räume machen (siehe die "Kugeln" in $(\mathbb{R}, d_1)$!). Sowohl vom vorangegangenen Abschnitt zu diesem wie von ihm zum folgenden gibt es in sich logische Überleitungen. Für den Abschnitt "Umgebungen" ist es gut, bereits allgemeinere Kugelumgebungen zu haben als die im Abschnitt 2.1.1 vorgestellten, der Übergang zu den allgemeinen Umgebungen ist dann einschichtiger. Bei sehr großer Zeitnot würde ich jedoch allgemein einräumen, daß der Lehrer an Abschnitt 2.2.3 noch am ehesten Kürzungen vornehmen kann.

Der Abschnitt über metrische Räume ist im Schülerbuch so gestaltet, daß er möglichst rasch und so mühelos wie möglich erarbeitet werden kann. Der Leser soll vor allem in die Lage versetzt werden, Beispiele metrischer Räume selbst zu finden und diese als topologische Räume zu verstehen. Aus dieser Tendenz zur Zeitersparnis heraus werden die Eigenschaften von Distanzfunktionen rasch und nach dem Prinzip der gelenkten Entdeckung zusammengestellt. Dabei erweist sich die zu große Bekanntheit der Abstandsfunktionen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ als methodisches Hindernis. Die Abstandsfunktionen in diesen Räumen sind dem Schüler so selbstverständlich geworden, daß es schwierig für ihn ist, die gemeinsamen allgemeinen Eigenschaften als auffallend zu bemerken. Zudem ist es so, daß es sich hier im Hinblick auf die Entfernungsmessung nicht um dreierlei Räume handelt, sondern wie jedem bekannt, um eine Kette von Unterräumen und es sich somit im Grunde um eine Abstandsfunktion in allen drei Räumen handelt. Deshalb ist es auch für den Schüler schwer, allgemeine Eigenschaften von Distanzfunktionen zu finden, nachdem ihm ja im Grunde nur eine einzige vorliegt.

Will man diese methodische Schwierigkeit überwinden, so bieten sich zwei Wege an, deren Wahl von den Vorkenntnissen der Schüler abhängt. Diese wurden, da sie sehr verschieden sind, nicht in das Schülerbuch aufgenommen, sondern dort wurde der rasche, stark gelenkte Zugang vorgelegt. Einer der induktiven Zugänge geht davon aus, daß die Schüler bereits mit der Vektorrechnung vertraut sind. Die Entfernung zweier Punkte des $\mathbb{R}^3$ wurde dort dargestellt als

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, \vec{y}) &= \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \end{aligned}$$

Der Schüler kann nun verhältnismäßig leicht dazu bewegt werden, diese Abstandsdefinition auf den $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, usw. auszuweiten. Oft wurde diese Möglichkeit bei der Behandlung des Skalarproduktes bereits im früheren Unterricht gestreift. Nun stellt man jedoch die zweiflerische Frage, ob man denn und wenn ja, weshalb man berechtigt sei, diese Festsetzung "Abstand" zu nennen. Diese Frage löst Verblüffung und Ratlosigkeit aus. Man muß Hilfestellung bieten und das Augenmerk auf die Eigenschaften der Abstandsfunktion lenken. Zu stark wird vom Schüler dabei immer nur an die analytische Darstellung der Funktion gedacht. Es ist nötig weiterzufragen. Gemeinsam werden die Eigenschaften gesammelt. Dabei ist die Vorstellung, daß die Abstandsfunktion eine Abbildung darstellt, eine beträchtliche Hürde für den Schüler, besonders was die Definitionsmenge $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ anbetrifft. Deshalb ist es leichter, die Bestimmungsstücke der Distanzfunktion zunächst verbal zu sammeln. Für den Schüler ist bemerkenswerter Weise der Graph das nächstliegende Bestimmungsstück. Er notiert den Graphen durch die Abbildungsvorschrift:¹⁾

$$(x|y) \longmapsto d(x,y)$$

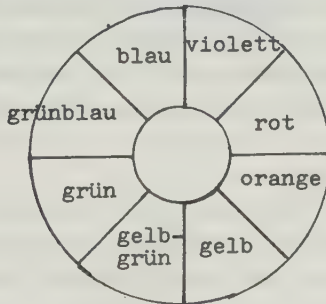
Dann ist es günstig, zunächst die Zielmenge²⁾ und zuletzt erst die Definitionsmenge²⁾ zu notieren. Die Sprechweise "Punktepaar" hilft dem Schüler bei letzterer. Die Unterscheidung der Pfeile $\longmapsto$ und $\longrightarrow$ wird im Gymnasium

1) Dies hat allerdings nur Sinn, wenn Quelle und Ziel der Abbildung gleichzeitig mit angegeben werden. Zwar sieht dies auch der Schüler, er wird aber trotzdem den Graphen bzw. die Abbildungsvorschrift zuerst nennen. Über die Ursachen dieser Gewohnheit soll hier nicht diskutiert werden.

2) Die in den Mathematikwerken gepflegten Bezeichnungen Quelle und Ziel einer Abbildung haben sich in der Schulmathematik noch nicht durchgesetzt. Anstelle von Quelle sagen wir im Lehrgang stets Definitionsmenge, für Ziel einer Abbildung sagen wir Zielmenge einer Abbildung. Der curriculare Lehrplan für Mathematik in der Kollegstufe (Auer-Verlag, 1976) legt die Begriffe Definitions- und Wertemenge fest. Eine eigene Bezeichnung für das Ziel einer Abbildung wird nicht eingeführt, was zu bedauern ist.

teilweise gepflegt und sollte im vorliegenden Kurs zum Vorteil auch berücksichtigt werden.

Hat man Schüler vor sich, die noch keine Kenntnisse in Vektorrechnung aufweisen, so muß ein anderer Zugang zu den Axiomen des metrischen Raumes ersonnen werden. Man kann etwa von einer Menge von Farben (Farbwerten) ausgehen, z.B. orange, rot, violett, blau, grünblau, grün, gelbgrün, gelb. Es sollten nicht zu viele Farbabstufungen sein. Im bisherigen Umgang mit Farben (sei es aus dem täglichen Leben, sei es aus dem Kunstunterricht oder Physikunterricht) hat der Schüler möglicherweise von Nachbarfarben oder Ähnlichem gesprochen. Es ist demnach nicht sinnlos vom Abstand zweier Farben unserer Skala zu sprechen. Die zahlenmäßigen Abstände werden freilich Setzungen sein. Immerhin wird dadurch als erstes klar, daß es darauf ankommt, jedem Paar von Farben eine Zahl zuzuordnen, will man Abstände der Farben zahlenmäßig angeben. Als Hilfe für die Festsetzung dient eine Art von Farbenrad.



Es entspricht auch dem Vorschlag der Schüler, zunächst die Abstände für unmittelbare Nachbarn festzusetzen. Allerdings werden ganz unterschiedliche Zahlen vorgeschlagen. Genannt wird u.a. 1 aber auch $\frac{\pi}{8}$. Alle sind sich aber darüber einig - und das sind nun bereits Feststellungen, die später in die Axiome eingehen - daß der Abstand

zweier Nachbarn nie null ist und daß der Abstand von f_1 zu f_2 ebenso groß ist wie von f_2 zu f_1 . Über diese Aussagen reflektieren wir noch eingehender und notieren sie dann gleich in der angestrebten Form:

$$(1) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(2) d(x,y) = d(y,x) \quad \text{für alle } x,y$$

Schwieriger wird es, den Abstand zweier Farben, die nicht benachbart sind, festzusetzen. Wir hatten uns auf Abstand 1 zweier unmittelbarer Nachbarn geeinigt. Darauf bauten die Schüler auf und setzten das Rad benützend fort: $d(\text{gelb, rot}) = 2$, $d(\text{gelb, violett}) = 3$, $d(\text{gelb, blau}) = 4$. Läßt man die Schüler gewähren, so könnte es vorkommen, daß weiter gesetzt wird: $d(\text{gelb, grünblau}) = 5$. Hier ist es jedoch nicht nötig, daß der Lehrer sofort korrigierend eingreift, denn setzt der Schüler sein Verfahren fort, so muß er konsequent $d(\text{gelb, gelbgrün}) = 7$ setzen. Dieser Abstand war aber früher bereits 1 gesetzt worden. Hat man Geduld, so finden die Schüler gemeinsam den Ausweg aus diesem Dilemma, nämlich als $d(f_1, f_2)$ die kleinere Anzahl der Felder zu nehmen, die entlang dem Rad Übersprungen werden müssen, um von f_1 zu f_2 zu kommen. Analysiert man nun im Nachhinein, was zu dem Irrtum führte, so war es das Bestreben, zu beachten, daß

$$d(f_1, f_3) = d(f_1, f_2) + d(f_2, f_3)$$

sein soll. Man stellt fest, daß das jetzt nicht mehr für je drei beliebige Farben f_1, f_2, f_3 bei Beachtung der Reihenfolge gültig ist. Nach einer anderen allgemeinen Aussage gefragt, findet man gemeinsam:

$$d(f_1, f_3) \leq d(f_1, f_2) + d(f_2, f_3)$$

Damit hat man auf diesem auch jüngeren Schülern (Kurs II bestand zum Teil aus 17-jährigen!) zugänglichen Weg die Axiome des metrischen Raumes gesammelt.

Ein sehr anspruchsvoller Weg zu den Axiomen wäre für ältere Schüler (13. Klasse bzw. Kollegstufe II) auch über den Abstand von Funktionen¹⁾ möglich. Dazu ist es nötig, daß die Schüler bereits Kenntnisse aus der Integralrechnung haben. Ist das der Fall, so kann ein solcher Funktionenraum sehr wohl betrachtet werden. Ich würde allerdings zunächst von einem endlichen Funktionenraum ausgehen.²⁾ Hat man die Möglichkeit, computer-unterstützt die Graphen aller gegebenen Funktionen für eine gegebene (stets gleiche) Definitionsmenge herzustellen und eventuell auf transparentem Papier darzustellen, so läßt sich mit den Schülern darüber sprechen, ob eine Funktion f_2 einer Funktion f_1 näherkommt als eine andere Funktion f_3 der Funktion f_1 . Allerdings kann mit Hilfe der Anschauung dies wohl nur sicher ausgesagt werden, wenn der Unterschied im Grad der Annäherung ziemlich deutlich sichtbar ist. Die Schüler werden dies durch Aufeinanderlegen der Transparente feststellen können. Das bringt sie darauf, die von den beiden zugehörigen Kurven eingeschlossene Fläche als Maß für die Abweichung der Funktionen voneinander zu verwenden. Dies führt unmittelbar auf die Verwendung des Integrals. Da die beiden verglichenen Funktionen in der Definitionsmenge mehrere Schnittpunkte haben können, muß nur noch beachtet werden, daß das Integral

$$d(x,y) = \int_D |x(t) - y(t)| dt$$

heißt, wobei x und y Funktionen des gegebenen endlichen Funktionenraumes sein sollen. Die drei Eigenschaften, die die Axiome des metrischen Raumes bilden, werden wie bei den bisherigen methodischen Vorschlägen im Zuge von Überlegungen aufgefunden, ob es plausibel sei $d(x,y)$ Abstandsfunktion zu nennen.

1) reellwertige, stetige Funktionen, mit derselben Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$

2) In Kurs I habe ich hierzu recht gute Erfahrungen gemacht, obwohl bei der Durchführung die mündliche Arbeit - nur von Tafelskizzen unterstützt - überwog. Bei dem geschilderten gründlichen Vorgehen verspreche ich mir deshalb noch überzeugenderen Erfolg.

Nun werden, zunächst in $\mathbb{I}$, weitere Abbildungen von $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ nach $\mathbb{R}_0^+$ ¹⁾ vorgestellt, die die Eigenschaften (1) bis (3) ebenfalls aufweisen (S. 97). Am ersten Beispiel wird im Schülerbuch vorgeführt, wie man es anstellt, die drei Eigenschaften nachzuweisen. Bei der zweiten vorgestellten Funktion auf $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ wird dies schon dem Schüler überlassen. Es ist für den Lehrer ratsam, mit den neu vorgestellten Abstandsfunktionen jeweils einige konkrete Punktepaaire tatsächlich auszumessen. Dadurch wird das Vertrautwerden mit der neuen Abstandsfunktion besser gewährleistet. Auch wird möglicherweise dabei bereits das Verständnis für den Nachweis der drei Eigenschaften vorbereitet. An einer Stelle des Beweises zu der Funktion d_1 wird eine spezielle Ungleichung des Absolutbetrages in $\mathbb{R}$ verwendet, welche den Schülern bekannt ist. Sie wird deshalb nicht gesondert im Text bewiesen.²⁾ Auch für Aufgabe 35 braucht der Schüler für den Beweis der Eigenschaft (3) diese Ungleichung wieder. Die an den verschiedenen Beispielen festgestellten drei Eigenschaften werden dazu verwendet, festzulegen, wann eine Funktion zweier Variablen Abstandsfunktion heißt.

Zur Formulierung der Definition 9 ist Verschiedenes zu bemerken, was der Lehrer nicht übersehen sollte. Für manche Schüler ist die Bezeichnung der Abbildung nur mittels des Kleinbuchstabens d ungewohnt, sie haben - wie es noch hie und da der Fall ist im Analysisunterricht

1) $\mathbb{R}_0^+ = \{x \mid x \geq 0\}_{\mathbb{R}}$

2) Einen Beweis könnte der Schüler - sofern er ihn nicht in seinem Analysisbuch findet - in Belkner, H.: Metrische Räume. Mathematische Schülerbücherei Nr. 65, Leipzig 1972, nachsehen.

den Sprachgebrauch "die Funktion $f(x)$ " gepflegt¹⁾, während wir zu $f(x)$ "das Bild von x unter der Abbildung f " sagen. Für alle Schüler ist die Definitionsmenge $M \times M$ ungewohnt. Wurde bei der Hinführung auf die Definition - also bei der Behandlung jedes Beispiels - genügend betont, daß jeweils jedem Punktepaar eine positive reelle Zahl zugeordnet wird, wenn ein Abstand definiert wird, so ist die Bezeichnungsweise $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ inhaltlich (zwar mit Mühe) begreifbar. Ich schlage vor, zunächst stärker die Zuordnungsvorschrift $(x|y) \mapsto d(x,y)$ zu betonen und danach erst die Definitionsmenge und die Zielmenge über diese zu schreiben also so: $M \times M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ 2)

$$(x|y) \mapsto d(x,y)$$

Die erörterten drei Eigenschaften werden in der Definition in formalisierter Kurzform wiedergegeben. Eigenschaft (2) und (3) sind als Allaussagen formuliert. Dabei ist es für (2) ratsam zu schreiben "für alle $x \in M$ und alle $y \in M$ " oder kürzer "für alle $x \in M, y \in M$ ". Noch kürzer sollte man sich nicht fassen, wie in "für alle $x, y \in M$ ", da die Schüler daran nicht gewöhnt sind und es damit nur einen weiteren Anlaß für Verwirrung gäbe. Bei Eigenschaft (3) gilt Entsprechendes.

Während die vorangegangenen Beispiele als Hilfe und Motivation für die Definition 9 dienten und deshalb vom Bekannten ausgingen, (z.B. der Punktmenge $\mathcal{P}$), ist als das der Definition folgende Beispiel ein abstraktes gewählt. Die Anwendung der Definition geschieht sehr ausführlich. Für eine endliche Menge M ist $M \times M$ endlich.

1) Laut curricularem Lehrplan sollte das allerdings nicht mehr der Fall sein.

2) Der Pfeil in dieser Zeile wird erst ganz zum Schluß eingezeichnet.

Dadurch ist es möglich, für jedes geordnete Paar aus $M \times M$ den zugeordneten Funktionswert wirklich aufzuschreiben. Durch dieses den Außenstehenden umständlich anmutende Vorgehen wird sich der Schüler des Wesens der Abstandsfunktionen als Abbildung $M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+^+$ noch bewußter. Auch für das Begreifen der Allaussagen in Eigenschaft (2) und speziell in (3) ist es von Bedeutung, daß der Schüler hier durch aufeinanderfolgendes Einsetzen von allen möglichen Paaren bzw. Tripeln von Elementen aus M den Wahrheitswert der Aussagen tatsächlich nachprüfen kann.

Bewußt werden im Schülerbuch die Begriffe "Abstandsfunktion" und "metrischer Raum" in getrennten Definitionen festgelegt. Damit wird bezweckt, daß dem Schüler deutlicher wird, daß die Struktur "metrischer Raum" aus einem Paar besteht, dessen Bestandteile die Menge aller Punkte des Raumes und eine Abstandsfunktion auf dieser Menge sind. Außerdem haben wir durch dieses Vorgehen den Vorteil, die bekannten Beispiele metrischer Räume nun nochmals als Modelle des Axiomensystems (auch wenn wir die Definition 10 nicht so genannt haben) zu sammeln und aufzuschreiben. Beispiel 14 bringt die Erkenntnis, daß jede Menge zu einem metrischen Raum gemacht werden kann.

Wie auf S. 283 Mitte ausgeführt, ist es

methodisch jeweils wichtig, Kontrastbeispiele zum eingeführten Begriff ebenfalls vorzustellen, also solche Funktionen $d(x,y)$ und Trägermengen zu betrachten, die keine metrischen Räume sind. Der Nachweis eignet sich als Übungsaufgabe (S. 100).

Im metrischen Raum $(\mathcal{M}, d)$ ist uns die durch die übliche Metrik aufgeprägte Struktur anschaulich gegenwärtig. Etwa von der Dreiecksungleichung für die übliche Abstandsfunktion in $\mathcal{M}$ haben wir unmittelbar die bildliche Darstellung vor Augen und beschreiben deshalb auch manchmal die Dreiecksungleichung umgangssprachlich mit: "der Umweg ist länger als der direkte Weg". Dieses anschauliche Bild, das

wir von den Abstandsverhältnissen in $\mathcal{U}$ haben, fehlt uns bei allgemeinen metrischen Räumen. In allgemeinen metrischen Räumen ist es in der Regel nicht mehr möglich, die Struktur, die dem Raum durch die Definition der Metrik aufgeprägt ist, als Ganzes anschaulich vor Augen zu haben. In Kurs II hatte ich deshalb den Plan, die Abstandsverhältnisse in endlichen Räumen doch wenigstens an einem Modell¹⁾ zu demonstrieren. Die Schülerinnen gingen bereitwillig darauf ein, zunächst ein solches Modell für Beispiel 14 herzustellen. Dabei sollen die drei Elemente von M durch Punkte der Ebene dargestellt werden, die in $\mathcal{U}$ Abstände voneinander haben, die maßstabsgetreu die Abstandsverhältnisse in (M,d) widerspiegeln. Von einigen Kursteilnehmerinnen wurde allerdings der Fehler gemacht, die drei Punkte als kollineare Punkte darzustellen. Betrachtet man dieses Modell mit der Raumvorstellung des euklidischen Raumes, so haben dann zwei der drei Punkte den Abstand 2 statt des vorher vereinbarten Abstandes 1. Dies erkannten die Schülerinnen aber rasch als falsch und ausnahmslos alle Schüler nannten das gleichseitige Dreieck als Modell für obigen metrischen Raum. Daraufhin verminderten wir einmal und erhöhten wir später die Anzahl der Punkte von M um eins und stellten unter Beibehaltung obiger Metrik erneut die Frage nach der möglichen modellhaften Darstellung der metrischen Räume. Für die Mächtigkeit 2 des Raumes wird als Modell die Strecke genannt und für die Mächtigkeit 4 nach einigen vergeblichen (irrigen) Anläufen das Tetraeder. Betrachten wir die Dimension der einzelnen Modelle, so stellen wir einen Zusammenhang zwischen der Mächtigkeit von M und den Dimensionen der hergestellten Modelle fest.

1) Die Bezeichnung "Modell" ist nun in der physikalisch-technischen Bedeutung gemeint im Gegensatz zur vorher gepflegten Bezeichnung Modell eines Axiomensystems.

Anzahl aller Punkte aus M	Dimension des Modells
2	1 (Strecke)
3	2 (gleichseitiges Dreieck)
4	3 (Tetraeder)

Die Schüler(besonders des Kurses II) sind von der Betrachtung sehr gefesselt und möchten selbst den Faden weiterspinnen. Es wird vermutet, daß man die begonnene Aufstellung fortsetzen kann. Dann müßte bei Gesamtpunktzahl 5 das Modell die Dimension 4 haben, allgemein bei Gesamtpunktzahlen n das Modell die Dimension $n-1$. Es ist müßig, die Vermutung beweisen zu wollen; denn das Modell der Dimension 4 kann man sich ohnehin nicht anschaulich vorstellen. Daß 5 verschiedene Punkte im dreidimensionalen Raum nie so angeordnet werden können, daß sie der Funktion $d(x,y)$ aus Beispiel 10 genügen, kann gemeinsam überlegt werden. Hiermit hat der Schüler Gelegenheit gehabt, selbst die Einführung höherer Dimensionen als 3 zu verlangen und ist damit im weiteren Kursverlauf stärker dazu motiviert, allgemeine Räume zu untersuchen.

Angeregt durch die Suche nach Modellen für die oben beschriebenen metrischen Räume, liegt es nahe, auch für die anderen - nämlich $(\mathcal{K}, d_1)$ und $(\mathcal{K}, d_2)$ - die Abstandsverhältnisse anschaulich erfassbar zu machen. Da $\mathcal{K}$ eine unendliche Punktmenge ist, ist es nicht möglich, ein anschauliches Modell der Art zu erfinden, daß die Punkte von $\mathcal{K}$ die Eckpunkte eines Körpers endlicher Eckenzahl und endlicher Dimension sind. Somit können nicht die Abstandsverhältnisse zwischen allen Punkten des Raumes gleichzeitig dargestellt werden. Aber es hilft durchaus zum anschaulichen Verständnis, von einem Punkt ausgehend die Abstände der anderen Punkte zu diesem darzustellen. Das

geschieht z.B. angeregt durch die Frage: "Wie sieht die Kugel $K(\mathfrak{o}, 1)$ in $(\mathbb{I}, d_1)$ aus?" Dieselbe Frage wird auch in $(\mathbb{I}, d_2)$ gestellt. Die Überlegungen, wie in diesen beiden Räumen andere Kugeln mit demselben Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ und Kugeln mit beliebigen anderen Mittelpunkten aussehen, sind dann einfach.

Bei der Ermittlung der Kugeln, die im Schülerbuch ausführlich aufgezeichnet ist, treten keine größeren Schwierigkeiten auf, da der Gebrauch des Absolutbetrages und der Umgang mit der Bezeichnung Maximum im zurückliegenden Analysisunterricht geübt wurden. Die Ermittlung der Kugeln sollte deshalb dem Schüler weitgehend selbständig überlassen werden. Schüler, die einen modernen Mathematikunterricht genossen haben, sind auch in der Lage, die Menge der geordneten Paare $x = (x_1 | x_2)$, die $d_1(\mathfrak{o}, x) = 1$ erfüllen, durch Gebrauch des einschließenden "oder" zu beschreiben.¹⁾

Für allgemeine metrische Räume stellen wir nun "Kugeln" auf (Definition 11, S. 101). Bei der Anwendung der Definition 11 entdeckt man, daß es in dem Raum (M, d) des Beispiels 14 nur Kugeln gibt, die entweder alle Punkte des Raumes umfassen oder nur ihr Zentrum.

Aus S. 103 ff wird dieses Wissen mit dem vorher Erarbeiteten über Basen von Topologien verflochten. In $\mathbb{I}$ stellten die sogenannten "Elementarkugeln" eine Basis der üblichen Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ dar. Deshalb liegt es nahe, die in (M, d) aufgestellten Kugeln ebenfalls daraufhin zu untersuchen, ob sie eine Topologie auf M erzeugen. Nach einigen Beispielen, die diese Vermutung bestärken, folgt Satz 5 (S. 104). Der Beweis wird nicht ausführlich ins Schülerbuch übernommen, da die dabei zu benützenden Gedankengänge dieselben sind wie im Beweis auf S. 91 oben.

1) Siehe Lehrplan 1972

Das mehrfache Wiederholen von Beweisen, die im Aufbau und Beweisgedanken gleich sind, würde die Schüler abstupfen. Hier kann eingewendet werden, daß die Wiederholung ähnlicher Beweise - wie hier - ja nicht nötig wäre, wenn rechtzeitig die allgemeinste Aussage entwickelt und bewiesen würde, also zu einem früheren Zeitpunkt bereits Satz 5 bewiesen würde und nicht zunächst nur die Spezialisierung von Satz 5 auf $(\mathbb{I}, d)$. Es gehört jedoch zum wohlüberlegten methodischen Vorgehen des vorliegenden Kurses, zunächst jeweils so konkret wie möglich zu bleiben, da der Schüler erfahrungsgemäß meist für die konkretere Aussage des Spezialfalles stärker motiviert ist als für die abstrakte allgemeinste Aussage.

Der methodische Ablauf dieser Passage des Kurses sieht im einzelnen so aus: Es wird daran erinnert, daß in $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{I}, \mathcal{F}_{\mathbb{I}})$ die Mengen der Kugeln (Kugelumgebungen) eine Basis von $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathcal{F}_{\mathbb{I}}$ darstellten. Da in einem allgemeinen metrischen Raum ebenfalls Kugeln definiert werden können, vermutet man, daß die Menge aller Kugeln des entsprechenden Raumes ebenfalls eine Basis einer Topologie darstellen. Hätte man sich auf S. 88 (bzw. S. 90) eingehender mit den notwendigen Bedingungen einer Basis befaßt, könnte man nun darauf zurückgreifen. Da dies nicht der Fall war und ich es außerdem für instruktiver halte, wird am Beispiel (M, d) von S. 102 unten einfach die Menge aller Vereinigungen von Kugeln aufgeschrieben - dies ist möglich, da es nur endlich viele Kugeln gibt - und die Menge aller Vereinigungen daraufhin untersucht, ob sie eine Topologie auf M darstellt. Da sich $\mathcal{P}(M)$ ergibt, ist dies schnell beantwortet. $(\mathbb{I}, d_1)$ und $(\mathbb{I}, d_2)$ können als weitere Beispiele für obige Vermutung herangezogen werden. Der Nachweis für diese Beispiele geht genauso wie der in Aufgabe 29 (S. 90) geforderte Beweis.

Es kann also zusammenfassend der Satz 5 formuliert werden, der auch heißen könnte: In jedem metrischen Raum stellt

die Menge aller Kugelumgebungen die Basis einer Topologie dar. Der Beweis wird nicht ausgeführt, wie oben begründet wurde.

Für den Schüler kann es nun reizvoll sein, daran anschließend über eine Art von "Umkehrung" des Satzes 5 nachzudenken, damit meine ich das Metrisierbarkeitsproblem. Hiermit lernt der Schüler ein mathematisches Problem kennen, das erst in jüngster Zeit gelöst wurde.¹⁾

Im Rahmen des vorliegenden Lehrgangs soll jedoch nur auf die inhaltliche Bedeutung des Problems eingegangen werden, nicht auf die Lösung. Dies geschieht, indem der Schüler mit dem Wort metrisierbar konfrontiert wird. Am Beispiel 10 bzw. 14 haben die Schüler bereits früher erkannt, daß jede Menge zu einem metrischen Raum gemacht werden kann, wenn man ihr die "triviale" Metrik $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x,y) = 0$ für $x = y$ beigibt. Somit kann jeder topologische Raum zu einem metrischen Raum gemacht werden. Das ist es also nicht, was man mit Metrisierbarkeitsproblem bezeichnet.

Von den begabteren Schülern kann nun die richtige Formulierung des Problems durchaus selbständig gefunden werden. In meinem Kurs I wurde vorgeschlagen, daß es wohl interessant wäre zu wissen, ob ich die Menge aller Punkte eines topologischen Raumes so mit einer geeigneten Metrik ausstatten kann, daß die Elementarkugeln, die ich damit definiere, eine Basis der gegebenen Topologie darstellen. Die Schüler sind sehr davon beeindruckt, daß sie damit ein Problem formuliert haben, für das die Wissenschaft erst 1951 eine Antwort hatte, indem eine notwendige und hinreichende Bedingung für Metrisierbarkeit topolo-

1) Siehe hierzu auch die Ausführungen zum Lernziel d, das in Kapitel 1.3 erörtert wurde.

gischer Räume aufgezeigt wurde. Für das Kulturverständnis der Schüler ist es auch wichtig, hier die Namen der beteiligten Forscher (Namen von Mathematikern aus aller Welt) zu nennen. Bezüglich näherer Einzelheiten zu dem Problem bringe ich bewußt die Aufforderung im Schülerbuch, in einschlägigen Fachbüchern nachzulesen¹⁾. Nach jeweiliger Durchsicht der Originalarbeiten ist es außerdem vom Lehrer von Fall zu Fall zu entscheiden, ob er die Schüler nicht sogar auf die Lektüre von Originalarbeiten hinweisen sollte.

Wäre der vorliegende Kurs bereits als Leistungskurs einer Kollegstufe geführt worden, so hätte ich hier die Gelegenheit ergreifen können, die Untersuchung einiger konkret vorgegebener Beispieltopologien auf die Frage der Metrisierbarkeit hin als Facharbeit zu vergeben. Eine Steigerung der Schwierigkeit der Facharbeit würde es bedeuten, für metrisierbare und nicht metrisierbare Topologien Beispiele, die noch nicht geläufig sind, zu finden und womöglich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Metrisierbarkeit daran herauszustellen.

Übungsaufgaben, die teilweise recht skurrile Metriken vorstellen, finden sich bei Belkner, Arnold, Lipschutz, Dieudonné²⁾. Bei letzterem wird zum Beispiel eine p -adische Abstandsfunktion auf $\mathbb{Z}$ betrachtet. Da mit der Unterrichtszeit gehaushaltet werden muß und diese Sammlung von Metriken für den gesamten Kursverlauf nicht von

1) Vergleiche hierzu die allgemeine Begründung in 1.4.2

2) Belkner, H.: Metrische Räume. Leipzig 1972

Arnold, B.H.: Elementare Topologie. Göttingen 1964

Lipschutz, S.: Theory and problems of general topology. New York 1965

Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Braunschweig 1972

tragender Bedeutung sind, würde ich die Untersuchung dieser oder die Konstruktion weiterer Metriken den häuslichen Facharbeiten reservieren.

3.2.4 Zu: 2.2.4 Umgebungen eines Punktes

Der Abschnitt 2.2.4, in dem es um den Umgebungsbegriff der Topologie geht, ist wie der vorangegangene Abschnitt wieder recht umfangreich. So stellt sich um so deutlicher die Frage nach der Bedeutung des Begriffs Umgebung und der mit ihm zusammenhängenden Aussagen für den vorliegenden Topologie-Kurs. Im weiteren Verlauf des Kurses werden wir den Umgebungsbegriff zunächst für die Konvergenzdefinition, dann aber auch für die Definition des Häufungspunktes und des isolierten Punktes einer Menge unmittelbar verwenden. Mittelbar trägt der Umgebungsbegriff wiederum dann auch zu den Definitionen des Randes, des Inneren und des Äußeren einer Menge bei, da diese Definitionen für den vorliegenden Kurs auf der Definition des Häufungspunktes einer Menge aufbauen. Auf die den Umgebungsbegriff benützende lokale Stetigkeitsdefinition wird in 2.5.4 eingegangen. In den genannten Definitionen kommt meist der Passus "für alle Umgebungen eines Punktes x " vor, es werden also Aussagen über das Umgebungssystem eines Punktes x gemacht. Die allgemeinen Eigenschaften des Umgebungssystems $\mathcal{U}_x$ zu sammeln, ist demnach sinnvoll, erweist sich aber als mühevoll. Somit ist die Frage berechtigt, ob man sich nicht der Schulanalysis folgend, mit dem speziellen Begriff der ε -Umgebung (Kugelumgebung) begnügen könnte. Auf allgemeine topologische Räume übertragen hieße dies z.B. nur offene Umgebungen als "Umgebungen eines Punktes" zu bezeichnen. Für die mit Hilfe des Umgebungsbegriffs definierten Begriffe würde sich dadurch nichts ändern, da in den Definitionen jeweils Umgebungsbasis für Umgebungssystem gesetzt werden darf. Ausschlag dafür, doch den allgemeinen Umgebungsbegriff einzuführen, gab vor allem das Argument, der Oberstufenschüler solle sich keinen vom fachwissenschaftlichen Gebrauch verschiedenen Sinn der mathematischen Bezeichnungen aneignen.

Abschnitt 2.2.4 beschäftigt sich zunächst mit Umgebungen in metrischen Räumen, da hier die Kenntnisse der Schüler über Kugelumgebungen günstig eingesetzt werden können. Anschließend erfolgt der Übergang zu Umgebungen in allgemeinen topologischen Räumen. Das Kernstück des Abschnitts bildet das Sammeln der charakteristischen Eigenschaften von Umgebungssystemen. Dies ist von praktischer Bedeutung für die Verwendung der Umgebungssysteme in den Kapiteln 2.3 und 2.4. Außerdem wird dabei die Voraussetzung für das Verständnis von Umgebungsbasen gelegt, mit deren Behandlung der Abschnitt schließt.

Kugelumgebungen waren bereits in Kapitel 2.1 Untersuchungsobjekte. Sie waren unter den ersten Beispielen für offene Mengen, die der Schüler in diesem Lehrgang betrachtet. Um den Begriff Umgebung zunächst in metrischen Räumen allgemeiner zu fassen, wird provozierend vermerkt, daß die Kugelgestalt doch eine zu spezielle Gestalt der Umgebung eines Punktes sei. So wird der Schüler stark gelenkt auf die Definition 12 geführt. Dies erscheint angebracht, da der Schüler schließlich stets mit der Festsetzung des Begriffs Umgebung konfrontiert werden muß. Eine umgangssprachliche Motivierung ist gefährlich, da dort die "Umgebung eines Ortes" meist als gelochte Kugelumgebung verstanden wird. Definition 12 wird von den Schülern (nur des Kurses I) in formalisierte Kurzform gebracht und damit ihr Inhalt nochmals reflektiert. Aufgabe 36 verlangt die Definition 12 auf einen metrischen Raum mit endlicher Trägermenge (aus Beispiel 19) anzuwenden. Neben dem Übungseffekt die Definition betreffend, ergibt sich hieraus die "Notwendigkeit", der Menge aller Umgebungen eines Punktes einen Namen zu geben. Damit ist zur Definition 13 des Umgebungssystems übergeleitet. Durch die Aufgaben 37 und 38 wird u.a. bezweckt, daß der Schüler nicht den Eindruck hat, die Begriffe Umgebung und Umgebungssystem bezögen sich nur auf endliche metrische Räu-

me. In Aufgabe 37 sind Mengen aus $\mathbb{R}$ daraufhin zu untersuchen, ob sie nach Definition 12 Umgebungen eines fest vorgegebenen Punktes sind. Bei der Bearbeitung lernt der Schüler einige der Grundtypen von Teilmengen aus kennen, die als Umgebungen eines gegebenen Punktes infrage kommen und sammelt daneben an einem konkreten Beispiel, dem er sogar noch mit der Anschauung beikommt, Erfahrungen zu den später aufgelisteten Eigenschaften von Umgebungen. Wie Aufgabe 37 ist auch Aufgabe 38 für alle Schüler ohne Hilfe lösbar. Diese Gelegenheit zu einem Erfolgserlebnis ist nicht zu unterschätzen. Mit $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d_1)$ lernen die Schüler einen diskreten Raum kennen, der sie doch immer wieder stutzig macht. Zu diesem Zeitpunkt ist der Sinn der Beschäftigung mit diesem Raum noch nicht einsichtig; was den Schüler motiviert, ist die zeichnerische Wiedergabe der Umgebungen.

Die Überleitung zur Definition des Begriffs "Umgebung eines Punktes" in allgemeinen topologischen Räumen ¹⁾ ist wieder sehr kurz, überfordert den Schüler aber nicht. Es muß allerdings die Frage gestellt werden, ob die bisherigen Umgebungen (nach Definition 12) auch nach Definition 14 noch als solche gelten; das Umgekehrte ist in einem metrischen Raum ebenso richtig. Eine auf die Definition 14 folgende schematische Zeichnung soll den Schülern helfen, sich die Definition einzuprägen. Aufgabe 39 wendet die Definition im topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ an, $M = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, M\}$. In dieser nicht-trivialen endlichen Topologie hat der Punkt b als kleinste offene Umgebung $\{b\}$ und der Punkt d die Menge $\{b, d, e\}$. Die beiden Umgebungssysteme $\mathcal{U}_b$ und $\mathcal{U}_d$ haben recht unterschiedliche Gestalt. Auch für die anderen Punkte a, c und e könnten jeweils die Umgebungssysteme

1) Aus didaktischen Gründen (siehe S. 17 ff und S. 46 ff) wird bewußt die allgemeine Definition (14) nach der Spezialisierung (Definition 12) gebracht.

aufgestellt werden. Dies wird zwar in Aufgabe 39 nicht verlangt, würde aber das sich nun anschließende Sammeln der charakteristischen Eigenschaften von Umgebungen auf eine breitere Erfahrungsbasis stellen. Die für alle Umgebungssysteme in allen Topologien gültigen Eigenschaften

$$(U1) \mathcal{U}_a \neq \emptyset$$

$$(U2) \emptyset \notin \mathcal{U}_a$$

$$(U3) U \in \mathcal{U}_a \wedge U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_a$$

$$(U4) U_1 \in \mathcal{U}_a \wedge U_2 \in \mathcal{U}_a \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_a$$

$$(U5) U \in \mathcal{U}_a \Rightarrow \bigvee_{V \in \mathcal{U}_a} \bigwedge_{x \in V} U \in \mathcal{U}_x$$

werden bis auf (U5) jeweils als Fragen formuliert. Die Beweise gelingen den Schülern größtenteils recht gut (Erfahrung aus Kurs I). Die Antwort auf die Frage f) folgt unmittelbar aus dem Beweis zu Frage c). Für Kurse, die nur geringe Fertigkeiten in mathematischem Formalismus und in abstrakten Beweisgängen mitbringen, können a) und b) als Aufgaben gestellt, c) gemeinsam als Muster bearbeitet und d), e) und f) als Teamarbeit vergeben werden. Es müßte sich eigentlich zeigen, daß die Schüler durch den bisherigen Kursverlauf dazugelernt haben, d.h., daß ihre Fertigkeiten für die Anlage abstrakter Gedankengänge etwas größer geworden sind, dies war jedenfalls meine Erfahrung. Damit bereits jetzt das Sammeln der obigen Eigenschaften (U1) bis (U4) dem Schüler als sinnvoll erscheint, werden die Umgebungssysteme des Beispiels 20 nochmals auf diese Eigenschaften hin betrachtet. Würden sie für die aufgeführten Umgebungen nicht gelten, so müßten wir schließen, daß sich ein Fehler bei ihrer Konstruktion eingeschlichen hat. Dies ist natürlich nicht der Fall.

Beispiel 20 leitet einen längeren Unterrichtsabschnitt ein, der mit Satz 6 und Satz 7 sein Ziel erreicht. Dies muß bei der Unterrichtsplanung berücksichtigt werden. Der gesamte Abschnitt sollte nicht zerstückelt werden. Wenn

möglich, sollte auch schon der Inhalt von Satz 8 anklingen, auch wenn die gründliche Behandlung dann nicht mehr in derselben Unterrichtsstunde durchgeführt werden kann. Die methodischen Überlegungen zu diesem Teil des Kurses sehen die Sätze 6, 7 und 8 im Zusammenhang. Alle drei Sätze behandeln die Umgebung U eines Punktes mit dem Blick auf die Frage, ist U auch Umgebung anderer Punkte (die natürlich in U vorkommen müssen). Diese Fragestellung ist zunächst für den Schüler nicht naheliegend. Sie soll ihm trotzdem nicht fertig vorgelegt werden, sondern er soll sie erst als beachtenswert herausfinden. Deshalb wird auch Satz 6 nicht unmittelbar vorgelegt, obwohl keinerlei Beweisschwierigkeiten zu erwarten sind. Satz 6 und Satz 8 sollen als die zwei richtigen Antworten auf die oben geschilderte Fragestellung gesehen werden, darum soll ihre Behandlung so nah wie möglich aufeinanderfolgen. Nun wird auch erklärlich, warum ich die Aussagen von Satz 6 und Satz 7 nicht als eine Äquivalenzaussage aufführe, also als einen Satz wie in der Fachliteratur üblich, sondern zwei Sätze daraus mache. Außerdem hat der Schüler durch dieses Vorgehen Gelegenheit, die Umkehrung eines Satzes richtig zu formulieren. Die Fähigkeit hierzu wird in der Mittelstufe des Gymnasiums jetzt stark betont, oft ist sie in der Oberstufe jedoch wieder wie bereits in 1.4.1 angedeutet, verkümmert.

Insgesamt erfordert der mit Beispiel 2o beginnende weitere Ablauf des Kurses eine besonnene Führung durch den Lehrer. Hierbei kommt es auch auf die äußeren Einzelheiten an. Die Fragestellung soll durch Aufbereitung eines Beispiels auffallend gemacht werden. Dazu ist es nötig, eine nicht zu einfach gebaute Topologie im Beispiel zu verwenden. Sie hat in Beispiel 2o 5 Punkte und 1o offene Mengen. Dadurch werden freilich die Umgebungssysteme auch verhältnismäßig umfangreich. Damit der Schüler dabei nicht den Überblick verliert, sondern vielmehr sanft auf die Fragestellung gelenkt wird, bedarf es einer vorteilhaften

schriftlichen Form. Für das Auffinden der Frage, die der Aufgabe 41 (S. 112) vorangeht, ist es günstiger, eine übersichtliche Auflistung aller Umgebungssysteme der Topologie von Beispiel 20 gemeinsam zu analysieren, als daß jeder Schüler seine eigene Liste, aber oft wohl in unübersichtlicher Form, vor sich hat. Das Sortieren der offenen und der nicht-offenen Umgebungen in einem System kann dagegen jedem Schüler selbst überlassen werden. Im Schülerbuch werden im Anschluß einige Erkenntnisse über die Umgebungssysteme des Beispiels zusammengestellt, um zur Aufgabe 41 zu führen. Dies braucht im Unterricht nicht in gleicher Weise vorgenommen zu werden, sondern sollte der Kreativität der Schüler weit mehr Spielraum lassen. Dann ist zu hoffen, daß die Aussagen von Satz 6 und 8 gleichzeitig erkannt werden. Sie werden jedoch getrennt formuliert, da bei Satz 6 die Umkehrung (Satz 7) von besonders großer Bedeutung ist. Diese zeigt erst in späteren Abschnitten ihre praktische Bedeutung. Für den Beweis von Satz 7 gibt es bereits ein Muster (Beweis zu Satz 3, S. 89). Trotzdem haben die Schüler mit dem Beweis auf S. 113 doch einige Schwierigkeiten, wenn man sie ohne Hilfe den Beweis selbst versuchen läßt. Nach dem Durcharbeiten des Beweises ist es wichtig, daß die Schüler die Bedeutung von Satz 7 und 6 sowie Aufgabe 41 zusammenfassend in eigenen Worten ausdrücken können. Dies ist zur Hinführung auf Satz 8 unbedingt nötig. Die Aussage von Satz 8 wird zwar beim Vergleich der Umgebungssysteme aus den Beispielen und beim Nachdenken über Satz 6 und 7 erspürt werden, ihre eigentliche Formulierung wird - weil abstrakt - den Schülern nicht leicht fallen. Hier darf der Lehrer helfend eingreifen. Dann sollte eine Skizze des Beweises von Satz 8 von jedem Schüler annähernd (in Worten) erreicht werden. Allenfalls kann der Lehrer noch einen kleinen Impuls hinsichtlich der Fallunterscheidung geben. Man beachte jedoch, daß

die Fallunterscheidung für den Beweis an sich nicht nötig ist. Dem Schüler hilft sie jedoch.

An der folgenden Aufgabe 42 wird zunächst deutlich, daß die Gestalt der Umgebungssysteme jeweils ganz und gar von der Topologie des Raumes abhängt. Die Aufgabe will außerdem durch die Wahl der diskreten Topologie provozieren, das Umgebungssystem eines Punktes b nicht mehr aufzählend, sondern mit Hilfe der charakterisierenden Eigenschaft "ist Obermenge von $\{b\}$ " anzugeben. Dies leitet geschickt auf die Definition von Umgebungsbasen über (Definition 15, S. 116). Wie bereits bei der Einführung des Begriffs "Basis einer Topologie" nützen wir auch hier die Vorliebe des Schülers für sogenannte Arbeitserleichterungen methodisch aus. Dementsprechend werden an der Aufstellung auf S. 115 der Umgebungssysteme in beschreibender Form, implizit bereits die jeweils einelementigen Umgebungsbasen¹⁾ der Punkte a, b, c, d, e ins Blickfeld gerückt. Der Schüler würde es praktisch finden, wenn es gelingen würde, jedes Umgebungssystem durch die Angabe einer einzigen Umgebung (es wird erkannt, daß dies in den Beispielen jeweils eine offene ist) vollständig zu beschreiben. Der Gedanke an die damit verbundene Arbeitserleichterung motiviert ihn. Nun muß der Schüler aber mit Räumen konfrontiert werden, in denen es Umgebungsbasen von komplizierterer Form gibt. Das Beispiel $\mathcal{U}_o$ in (π, τ_π) ist hierfür gerade gut geeignet. Im Unterrichtsgespräch kann sich ganz allmählich eine der auf S. 116 aufgeführten Beschreibungen der Menge $\mathcal{U}_o$ entwickeln. Daß gerade der Punkt o von mir vorgegeben wurde, ist eine bewußt gewählte Erleichterung für den Schüler (über die der Mathematiker sicher lächelt). Die mündliche Beschreibung von $\mathcal{U}_o$ fällt den Schülern schließlich nicht schwer, sie ziehen ohne Eingreifen des Lehrers die Wahl der offenen Kreisscheiben

1) Die Bezeichnung fällt zu diesem Zeitpunkt noch nicht.

als Elemente der Umgebungsbasis vor. Die formale Niederlegung der Beschreibung von $\mathcal{U}_o$ fällt jedoch dem Großteil der Schüler nicht mehr so leicht. Hier hängt es davon ab, ob die mündliche Beschreibung genügend ausgereift war.

Ich will zwei mögliche Verläufe dieser mündlichen Erarbeitung schildern, indem ich bewußt alle Unzulänglichkeiten der möglichen Schülereinwürfe einkalkuliere. Dabei ist zu beachten, daß ich davon ausgehe, daß der Modus des Unterrichtsgesprächs in der betreffenden Klasse so eingespielt ist, daß der Lehrer durch bloßes Stirnrunzeln oder Kopfwiegen eine Verbesserung der Antwort provoziert. Das Ganze dauert nur wenige Minuten, da ein Wort das andere gibt.

a) Ein Schüler: "Zu $\mathcal{U}_o$ gehören Mengen aus π , die $\circ$ enthalten". Verbesserung: "Zu $\mathcal{U}_o$ gehören alle Teilmengen von π , die $\circ$ enthalten". Weitere Korrektur: "Zu $\mathcal{U}_o$ gehören alle offenen Teilmengen von π , die $\circ$ enthalten". Ein anderer Schüler: "Ja, aber zu $\mathcal{U}_o$ gehören auch Teilmengen von π , die nicht offen sind." Es bleibt nichts übrig als von $\mathcal{U}_o$ als von "der Menge aller ..." zu sprechen. Es kristallisiert sich heraus, daß jede Umgebung von $\circ$ außer $\circ$ noch eine "kleine" Kugelumgebung "um $\circ$ herum" enthalten muß. Wenn jetzt nicht die auf S. 116 festgehaltene Beschreibung von $\mathcal{U}_o$ kommt, kann der Lehrer etwas helfen. Die Notwendigkeit des Existenzquantors wird von den Schülern eingesehen.

b) Die erste Schülerantwort kann auch lauten: "Zu $\mathcal{U}_o$ gehören alle offenen Kreisscheiben mit Zentrum $\circ$ ". Eventuell kommt der Einwurf, auch offene Kreisscheiben hinzuzunehmen, die zwar $\circ$ enthalten, aber nicht als Zentrum. Dies führt auf den ersten geglückteren Vorschlag hin: "Um $\mathcal{U}_o$ zu bekommen, nehmen wir alle offenen Kreisscheiben mit Zentrum $\circ$ und alle Obermengen von diesen."

Damit ist bereits eine Umgebungsbasis gefunden, und zwar schneller als beim Weg a), aber das Auffinden der beschreibenden Form von $\mathcal{U}_o$ (wie auf S. 116 zu sehen) ist von hier aus schwieriger. Die Schüler versuchen es eventuell mit einer Mengenvereinigung:

$$\mathcal{U}_o = \{K(o, s) \mid s \in \mathbb{R} \wedge s > 0\} \cup \{ \dots \}$$

Die Darstellung der zweiten Menge (die ja sich als $\{T \in \mathcal{P}(\pi) \mid \bigvee_{s>0} K(o, s) \subseteq T\}$ ergeben soll) macht

weiterhin Schwierigkeiten. Und zwar stolpern die Schüler über das von ihnen in der Beschreibung gebrauchte "für alle". Sie sagen nämlich eventuell: "In die zweite Menge gehören alle Obermengen für alle offenen Kreisscheiben um o." Hier muß der Lehrer etwas eingreifen, indem er z.B. $\{T \in \mathcal{P}(\pi) \mid \dots\}$ nun vorgibt. Schließlich finden die Schüler die in die Lücke einzusetzende Eigenschaft. Nun ist es noch eine Aufgabe, den Ausdruck weiter zu vereinfachen. Nicht alle Schüler sehen sofort ohne Hilfe, daß $\{K(o, s) \mid s > 0\} \subseteq \{T \in \mathcal{P}(\pi) \mid \bigvee_{s>0} K(o, s) \subseteq T\}$ gilt.

Hat man wie auf S. 116 aufgeführt dann ein oder mehrere beschreibende Darstellungen von $\mathcal{U}_o$ erarbeitet, können jetzt von der Menge $\mathcal{K} = \{K(o, s) \mid s \in \mathbb{R} \wedge s > 0\}$ die allgemeinen Eigenschaften einer Umgebungsbasis abgehoben werden. Man sammelt: (1) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}_o$ (2) zu jedem $U \in \mathcal{U}_o$ gibt es $K \in \mathcal{K}$, so daß $K \subseteq U$. Nach der schriftlichen Formulierung von Definition 15 werden Beispiele gesammelt. Dabei wird klar, daß es zu einem Punkt mehrere mögliche Umgebungsbasen geben kann. Für eines der Beispiele könnte man noch erwähnen, daß das Umgebungssystem $\mathcal{U}_x$ selbst ebenfalls die Definition 15 erfüllt also Umgebungsbasis von x ist. Im Zuge des Sammelns der Beispiele streifen wir auch die Tatsache, daß es in (π, γ_π) zu den Punkten

auch jeweils abzählbare Umgebungsbasen gibt. Auf diese Besonderheit wird jedoch im Kursverlauf nicht weiter eingegangen.

An den Beispielen hat der Schüler erlebt, daß eine Umgebungsbasis von a leicht mit Hilfe einer Basis der Topologie gewonnen werden kann, und zwar indem alle Basis-elemente gesammelt werden, die a enthalten. Diese Aussage bildet Satz 9 (S. 118). Der Beweis ist eine nützliche Übung und stellt keine zu großen Anforderungen an die Schüler. In Beispiel 24 wenden wir Satz 9 auf $(\pi, \mathcal{O})$ an. Im Hinblick auf Aufgabe 62 (S. 135) zur Konvergenz ist dies vorteilhaft.

3.3 Zu 2.3 Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen

Dieses Kapitel stellt wie in der Einleitung ausgeführt, eine der tragenden Säulen des gesamten vorliegenden Lehrgangs dar. Die Motive dafür, diesem Kapitel eine derart starke Bedeutung zu geben, sind einmal die Möglichkeit, in starkem Maße an Bekanntes anzuknüpfen, ja dieses Bekannte in die Disziplin "Topologie" einzubetten, zum anderen die Möglichkeit, ein verhältnismäßig in sich geschlossenes Teilgebiet zu beleuchten, das möglichst viel von der Disziplin Topologie als Ganzem widerspiegelt.

Das Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte. Der erste widmet sich der Verallgemeinerung des Begriffs Folgen. Bisher sind dem Schüler nur Folgen in $\mathbb{R}$ bekannt, nun sollen auch Folgen in anderen topologischen Räumen untersucht werden. Der zweite Abschnitt bringt dann für diese allgemeinen Folgen eine Konvergenzdefinition. Diese muß natürlich mit der auf Folgen aus $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ anwendbaren in Beziehung gesetzt werden. Darüber hinaus werden dann einige grundlegende Aussagen über Konvergenz von Folgen in allgemeinen topologischen Räumen zusammengestellt und bewiesen. Wohl die wichtigste Erkenntnis ergibt sich dabei aus dem Einfluß der Eigenschaft "hausdorffsch" für topologische Räume auf das Konvergenzverhalten von Folgen in diesen. Allerdings ist diese Passage als Demonstration angelegt.

Die zentrale Erkenntnis des gesamten Kapitels soll für den Schüler sein, daß das Konvergenzverhalten einer gegebenen Folge von der jeweiligen Topologie, mit der der Raum ausgestattet ist, abhängig ist. Dieser Erkenntnis möchte ich beträchtlichen allgemeinbildenden Wert beimessen. Über die Bedeutung der Folgen für die Schul- wie die

Alltagsmathematik findet man ausführliche Darlegungen bei Pietzsch¹⁾. Für den praktischen Umgang mit der Konvergenz sind neben der Definition weitere aus dieser hergeleitete Kriterien wichtig. Besonders in $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ kennt man Bedingungen für Konvergenz, von denen einige notwendige, andere hinreichende Bedingungen und wieder andere notwendige und hinreichende Bedingungen sind. Es interessiert nun gewiß, welche dieser Bedingungen auch in allgemeinen Räumen Gültigkeit haben. Insbesondere ist hierbei das Cauchysche Konvergenzkriterium ein Untersuchungsobjekt. Ansonsten legen wir uns in Abschnitt 2.3.3 große Beschränkung auf. Eine Verallgemeinerung der Struktur des metrischen Raumes zu der des uniformen Raumes ist nicht vorgesehen. Dadurch können keine weiteren allgemeinen Aussagen über vollständige Räume erarbeitet werden.

1) Pietzsch, G.: Zum Grenzwertproblem. Untersuchungsergebnisse zur Vorbereitung und Behandlung des Grenzwertbegriffs. Berlin 1967, S. 7 ff

3.3.1 Zu: 2.3.1 Der Begriff Folge

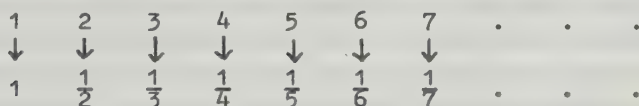
Will man den Folgenbegriff verallgemeinern, d.h. auch von Folgen in anderen Mengen als $\mathbb{R}$ sprechen, so muß er zunächst in $\mathbb{R}$ nochmals präzisiert werden. Mich interessierte zunächst (angeregt durch die entsprechenden Untersuchungen von Pietzsch¹⁾ mit Kindern der 8. Klasse), welche Vorstellung sich die Oberstufenschüler vom Begriff Folge machen. Man wird bei Schülern, die in Klasse 12 oder höher sind, bzw. den entsprechenden Kursen der Kollegstufe, auf gute "handwerkliche" Fähigkeiten im Umgang mit Folgen in $\mathbb{R}$ treffen. Diese Fertigkeiten reichen jedoch als Grundlage für die Ausdehnung des Begriffs auf Folgen in anderen Mengen nicht aus. Dies wird deutlich, wenn man als Einleitungsfrage stellt, jeder wisse ja, was eine Folge ist, es mögen Beispiele von Folgen genannt werden. Erstaunlicherweise nennt der größte Teil der Schüler einen analytischen Ausdruck für die Berechnung der einzelnen Folgenglieder. Stellt sich der Lehrer daraufhin dumm und bemerkt, daß er jetzt klar sehe, Folgen seien also Terme (was in diesem Gespräch auch als algebraischer Ausdruck bezeichnet werden kann), so herrscht bei den Schülern betretenes Schweigen. Es kann eine recht unbehagliche Pause eintreten. Einen kleinen Anstoß könnte der Lehrer durch die Aufforderung geben, ob nicht Folgen angegeben werden könnten, die auch schon in unteren Klassen verständlich wären. Man hofft, daß ein Schüler vorschlägt, eine gewisse Reihe von Zahlen aufzuschreiben, wie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Gibt man sich erneut als Lehrer zum Schein verständnislos, und bemerkt, daß man nun wisse, Folgen seien Mengen, so verzweifeln die Schüler schier an diesem "unwissenden" Lehrer. Man sollte das "Spiel" jedoch nicht zu weit

1) Pietzsch, G.: Zum Grenzwertproblem. Berlin 1967

treiben, sondern die Aufmerksamkeit allmählich darauf lenken, daß Zahlenfolgen Abbildungen von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ sind.¹⁾ Auf dem Weg dahin könnte der Schüler zunächst erneut verblüfft werden durch die Folge

1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., die der Lehrer selbst angibt. Hier werden die Schüler möglicherweise selbst stutzig und verwenden die Bezeichnung "Menge $\mathbb{N}$ " anstelle der Bezeichnung "Folge". Erleichtert nehmen sie den Rat an, den Folgen mit Hilfe des Abbildungsbegriffs beizukommen. Um das den Schülern bekannte Aussehen der Folgen nicht zu sehr zu verändern, wählt man anstelle eines beliebigen Pfeildiagramms günstiger untenstehende schematische Darstellung für die Abbildung



Bevor ich mein Vorgehen weiter beschreibe, möchte ich kurz darauf eingehen, welche Ursachen die anfängliche Verständnislosigkeit für den Begriff Folge an sich bei dem Schüler wohl haben könnten. Obwohl die Begriffe der Mengenlehre in den Mathematikunterricht des Gymnasiums aufgenommen sind, sind sie oft noch nicht derart integriert, daß es für die Schüler selbstverständlich wäre, eine Ansammlung von mathematischen Objekten als Ganzes aufzufassen und nach speziellen Eigenschaften dieses Ganzen zu fragen. Wird dann bei Einführung des Begriffs Folge der Akzent stärker auf das Bildungsgesetz der Folgenglieder gelegt, so umgeht es der Schüler unbewußt, sich mit der Folge als einem Ganzen auseinanderzusetzen. Er löst die Folge sozusagen in Einzelpunkte auf, die er nacheinander betrachtet. Er hat damit eine dynamische Vorstellung von Folgen, also die Vorstellung eines wandernden Punktes. Viele Mathematiklehrer unterstützen dies, da es scheint als fiele die Konvergenzbetrachtung auf diese Weise leichter. In der beschriebenen dynamischen Vorstellung

1) Dies haben die Schüler bereits in Klasse 11 gelernt aber wieder vergessen. Siehe hierzu Lehrplan von 1972. Beachten Sie allerdings den Zeitraum der Erprobung (Schuljahr 1972/73)

stellt eine konvergente Folge dann einen Punkt dar, der sich immer mehr einem Grenzpunkt nähert bis er womöglich mit diesem zusammenfällt. Aus dem Rahmen fallen dann allerdings Folgen, deren Folgenglieder alle gleich sind. Dann kommt die dynamische Vorstellung an eine Grenze, man müßte dann sagen, der Punkt bleibt in Ruhe. Die konvergenten Folgen kann man in zweierlei Typen einteilen, in solche, welche ihren Grenzwert als Folgenglieder enthalten und in solche, die ihn nicht enthalten. In der dynamischen Vorstellung würde man es versuchen so auszudrücken: im einen Fall erreicht der wandernde Punkt schließlich einen Punkt (den Grenzpunkt) und bleibt dort liegen, während der andere Fall bedeuten würde, der wandernde Punkt bemüht sich, immer näher an einen Grenzpunkt zu kommen, erreicht ihn aber nie. Die dynamische Vorstellung bringt dann Verständnis-Schwierigkeiten mit sich, wenn es sich um Folgen mit mehreren Häufungspunkten handelt. Jedes Modell, das die Folgenglieder als zeitlich aufeinanderfolgende Orte eines wandernden Punktes auffaßt, hat Schwierigkeiten, Häufungspunkte zu erklären, es sei denn, es bedient sich des Bildes von einem hin- und herhüpfenden Punkt, was bei manchen Folgen möglich wäre. So ist es verständlich, daß der frühere Analysisunterricht es manchmal gern umging, näher auf Häufungspunkte einzugehen. Denn gerade der ältere Analysisunterricht machte sich in starkem Maße die dynamische Vorstellung von Folgen zunutze. Diese Ausführungen sollen nicht bedeuten, daß eine Veranschaulichung von Folgen mittels eines dynamischen Modells ganz und gar zu verdammen sei, sie sollen vielmehr eine Warnung vor zu großer Einseitigkeit darstellen. Der Gegenvorschlag wird im folgenden näher ausgeführt. Zu beachten ist dabei allerdings, daß eine gewisse Erfahrung im Gebrauch des Mengenbegriffs bei den Schülern bereits vorhanden sein sollte. Im Rahmen dieses Topologie-Lehrgangs hat sich diese ohnehin eingestellt, wenn man an dieser Stelle des Lehrgangs angekommen ist.

Eine Reihe von Didaktikern¹⁾ vertritt die Meinung, im Oberstufen-Mathematikunterricht Folgen als Abbildungen bzw. Funktionen²⁾ einzuführen. Dies findet seinen Niederschlag in den neueren Lehrplänen (siehe curricularer Lehrplan für Mathematik in der Kollegstufe für Bayern, S. 23). Griesel hält diese Auffassung des Begriffs "Folge" in seinem eigenen Unterrichtswerk besonders konsequent bei und stellt sogar jeweils den Funktionsgraphen im kartesischen Koordinatensystem dar. Die Auffassung der Folgen als Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ hat z.B. den didaktischen Vorteil, daß sogenannte konstante Folgen als keine außergewöhnliche Besonderheit zu betrachten sind.

Da der Topologiekurs u.a. das Ziel hat, die früher erworbenen Kenntnisse und Fähigkeiten wenn möglich zu vertiefen, wird nicht nur die aus dem Analysisunterricht geläufige Definition des Begriffs Folge wiederholt (siehe Definition 16), sondern auch in einer Fußnote der Folgenbegriff etwas erweitert. Unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ werden ebenfalls als Definitionsmengen zugelassen. Dies ist nötig, damit "Teilfolgen" unter die Definition für Folgen fallen. Eine weitere Verallgemeinerung des Folgen-Begriffs - etwa zu Moore-Smith-Folgen - ist im Kurs (da für den Durchschnittsschüler zu anspruchsvoll) nicht vorgesehen.

-
- 1) Griesel, H.: Analysis I und II. Unterrichtshefte zur Mathematik von heute. Heft 04 und Heft 05. Hannover 1968 bzw. 1970
Kuypers, W. (Hrsg.): Mathematikwerk für Gymnasien, Oberstufe: Analysis I. Düsseldorf 1970
Breidenbach, W. (Hrsg.): Mathematik für die Sekundarstufe I (mittlere und obere Leistungsgruppen), 10. Schuljahr, Braunschweig 1974
Lambacher-Schweizer: Mathematisches Unterrichtswerk. Analysis. Stuttgart 1967
- 2) Die Bezeichnungen Abbildung und Funktion werden synonym benutzt.

Da man den Folgenbegriff im weiteren Verlauf des Kurses jedoch dahingehend verallgemeinern will, daß man als Zielmenge der Abbildung auch andere Mengen als $\mathbb{R}$ zulassen möchte, ist es nötig, daß sich die Schüler nochmals genau an die Definition des Abbildungsbegriffs erinnern. Dazu leitet Aufgabe 44 an. Sie ist bewußt so gestaltet, daß zuerst die Anwendung der Definition verlangt wird und dann erst ihre Formulierung. Meist sind die Schüler nämlich nicht in der Lage "aus dem Stand" sofort die Definition anzugeben, häufig haben sie jedoch "verschüttete Kenntnisse" der Definition, was daran sichtbar wird, daß sie die Beispiele richtig einordnen. Die Aufgabe zeigt daneben auch, daß es mir ein Anliegen ist, die Veranschaulichung durch Diagramme zusammen mit der Definition ins Gedächtnis zurückzurufen, davon verspreche ich mir eine stärkere Verinnerlichung der Definition. So hat die Teilaufgabe 44a) auch u.a. den Sinn, den Schüler dazu zu bringen, sich an die Bedingungen für den Verlauf der Pfeile im Diagramm zu erinnern, die dafür gut sind, daß eine Abbildung vorliegt. Teil c) von Aufgabe 44 wiederholt die Begriffe Definitionsmenge (= Quelle) und Wertemenge (= Bild). Da der Schüler an die Bezeichnungen Definitionsmenge und Wertemenge aus dem Analysisunterricht gewöhnt ist (Fußnote S. 287!) wird man bei diesen Bezeichnungen bleiben. Sollte es sich herausstellen, (was laut Lehrplan nicht vorkommen dürfte), daß die allgemeine Definition des Begriffs Abbildung den Schülern unbekannt ist, so sollte man mit Hilfe von Abschnitt 2.5.1 zunächst diese Lücke schließen, bevor man die Folgen behandelt.

In Aufgabe 45 soll dem Schüler nochmals ins Bewußtsein gerufen werden: Der Graph einer Zahlenfolge ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, also eine Menge geordneter Paare. Sofern die Schüler vergessen hatten,

was man unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen versteht, ist dies im zurückliegenden Kurs bereits wiederholt worden. (Siehe z.B. im Kapitel "Metrische Räume").

Obwohl die Sprechweise "die ersten fünf Paare" eigentlich nur sinnvoll ist, wenn in der Menge der Paare eine Wohlordnung erklärt ist, versteht der Schüler sofort, was der Aufgabensteller möchte. Ich ziele darauf ab, daß der Schüler einsieht, die Indexschreibweise a_n bedeutet inhaltlich dasselbe wie die Schreibweise als geordnetes Paar $(n|a)$.

Auch die für Folgen übliche Schreibweise wie:

$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$ sollte nochmals mit dem Abbildungsgedanken konfrontiert werden.

Zur weiteren Klärung des Begriffs Folge dient auch die Frage nach der Mächtigkeit des Graphen einer Folge. Als Menge von geordneten Paaren hat er die Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ (ist also stets eine unendliche Menge), die Menge der Folgenglieder (also die Wertemenge einer Folge) kann dagegen auch endliche Mächtigkeit haben. Dieser Gegensatz ist ein Argument mehr dafür, eine exakte Definition des Begriffs Folge anzustreben.

In manchen Büchern zur Analysis wird auch der Begriff "endliche Folge" gebraucht. Hierunter wird die Abbildung eines Abschnittes von $\mathbb{N}$ (z.B. der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$) in die Menge $\mathbb{R}$ verstanden. Wir wollen hier unter Folgen nur die "unendlichen Folgen" (wie sie von denselben Autoren genannt werden) verstehen, d.h. Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ bzw. Abbildungen von unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.

Im folgenden soll die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ wiederholt werden. Dazu ist es nützlich, den Begriff Endstück¹⁾

1) u.a. gebraucht diesen Begriff Dieudonné in: Grundzüge der modernen Analysis. Braunschweig 1972

zur Verfügung zu haben. Das Endstück einer Folge ist eine Teilmenge des Bildes (der Wertemenge) der Folge:

$$E_m = \{f(n) \mid n \geq m, n \in \mathbb{N}\} \quad (\text{Definition 17, S.122})$$

Dies muß genau beachtet werden. Hätte man bereits hier den Begriff Bild einer Teilmenge der Definitionsmenge bei der Abbildung f zur Verfügung, so ließen sich die Endstücke noch einfacher einführen. Endstücke von $\mathbb{N}$, $E_m = \{n \mid n \geq m\}_{\mathbb{N}}$, sind für den Schüler leicht begreiflich. Das Endstück einer Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wird dann als

$$f [E_m] \quad 1)$$

definiert, also als das Bild des Endstücks E_m von $\mathbb{N}$ bei der Abbildung f . Der vorliegende Kurs geht hier anders vor, da der Begriff "Bild einer Menge" an dieser Stelle noch nicht eingeführt ist und dem Schüler nach meiner Erfahrung auch nicht leichtfällt.

Zur Übung werden in den Aufgaben 46 und 47 Endstücke der Folgen von Aufgabe 45 aufgestellt und zwar in aufzählender Form (wobei man nicht alle Elemente tatsächlich schreiben kann) und danach zusätzlich in beschreibender Form der Mengenvorgabe. Es ist für die späteren Konvergenzuntersuchungen wichtig, daß die Schüler erkennen, daß die Endstücke einer Folge, so wie sie hier definiert sind, hinsichtlich der Ordnungsrelation $\leq$ linear angeordnet sind, also eine Kette bilden. Diese Erkenntnis will die Aufgabe 48 unterstützen, allerdings bewußt über den Umweg der Durchschnittsbildung von Endstücken.

Als "Suggestivfrage" ist die letzte Frage von Aufgabe 48 zu werten. Da die Menge aller Folgenglieder (d.h. die Wertemenge der Abbildung f) endlich sein kann, so kann dies

1) Gebrauch der eckigen Klammern siehe Abschnitt 2.5.2 (Schülerbuch)

eine Teilmenge der Bildmenge von f natürlich ebenfalls sein.

Nach diesem teilweise der Wiederholung gewidmeten Vorspann gehen wir auf S.123 ff. daran, den Begriff Folge auszuweiten. Bisher war immer von Zahlenfolgen die Rede, nun sollen beliebige Folgen betrachtet werden. Bei nicht zu hastiger Einführung haben die Schüler nach meiner Erfahrung damit keine Schwierigkeiten - zumal bei der hier gepflegten Grundlegung des Folgenbegriffs. Zielmenge der Abbildung f kann nun statt $\mathbb{R}$ eine beliebige Menge sein. Wir verallgemeinern behutsam und benutzen zunächst die euklidische Ebene $\mathbb{JL}$ als Zielmenge. Lediglich die allgemeine Schreibweise ist nun etwas mühsamer als bei Folgen in $\mathbb{R}$. Fast empfinden Schüler (nach meiner Erfahrung in Kurs I) das Aufschreiben einiger Punkte der Folge als zu leicht, wenn ein Bildungsgesetz für die Koordinaten der Punkte dieser Folge gegeben ist. Trotzdem halte ich diese Übungen und auch die Darstellung der Punkte in einem Koordinatensystem für unerlässlich. Man kann bemerken, daß Schüler beim Zeichnen der Punkte p_n mit den Koordinaten $(\frac{2}{n} | \frac{3}{n})$ sehr rasch über Konvergenz dieser Punktfolge zu sprechen kommen. Tritt dies nicht ein, so kann man sie dadurch dazu provozieren, daß man sie zur Beschreibung der Lage der gezeichneten Punkte auffordert. Bei diesen Konvergenzbeurteilungen gehen die Schüler meist von der Anschauung aus oder sie übertragen Kriterien, die für Folgen in $\mathbb{R}$ gelten, ohne Zögern auf Folgen in $\mathbb{JL}$. Man kann sie von solch gedankenloser Übertragung durch Beispiele von Punktfolgen wie $\langle s_n \rangle = \langle n^2 | \frac{1}{n^2} \rangle$ heilen. Es gibt einen nicht geringen Anteil unter den Schülern, die ohne Überlegungspause diese Punktfolge als konvergent bezeichnen. Selbst eine Darstellung im kartesischen Koordinatensystem belehrt sie nicht sogleich eines Besseren, es müssen erst reichlich viele Punkte der Folge eingezeichnet werden.

Somit sind die Aufgaben 49 und 50 (S.125/26) für den Lehrgang nicht unwichtig. Bei ihrer Bearbeitung gewöhnt sich der Schüler an Folgen in $\mathbb{J}$ und gewinnt so ein Reservoir an Beispielen von Folgen, die nicht aus $\mathbb{R}$ sind.

Es erscheint ratsam, auch solche Punktfolgen in $\mathbb{J}$ zu betrachten, bei denen zunächst kein Bildungsgesetz in Form eines algebraischen Ausdrucks für die Komponenten der Punkte gegeben ist, sondern z.B. rein geometrische Konstruktionsanweisungen, die die Punktfolge bestimmen. Ein derartiges Beispiel kann ohne weiteres in den Kurs eingebaut werden. Es wurde aus Platzgründen nicht in das Schülerbuch aufgenommen. Eine mögliche Konstruktionsvorschrift für eine Punktfolge in $\mathbb{J}$ ist: Gegeben ein gleichseitiges Dreieck in der Ebene. Erster Folgenpunkt sei der Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks. Dann konstruiert man das nächste Dreieck durch Beibehalten eines Eckpunktes und Halbieren der davon ausgehenden Seiten. Als zweiter Folgenpunkt soll dann der Schwerpunkt des neuen Dreiecks gelten. So fährt man fort und erhält eine Folge von Punkten in $\mathbb{J}$.

Für die Beschäftigung mit konvergenten Folgen in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ konnte der Schüler auch Motivation daraus ziehen, daß diese Folgen praktische Bedeutung hatten. Weitere mathematische Begriffsbildungen bauen auf der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ auf, und auch in der angewandten Mathematik spielt die Konvergenz eine Rolle (vor allem lernt dies der Schüler an Beispielen aus der Physik kennen). Es fragt sich nun, ob auch die Beschäftigung mit konvergenten Folgen aus $(\mathbb{J}, \gamma_{\mathbb{J}})$ von dieser Motivation zehren kann. Es gibt tatsächlich ein Beispiel aus den Anwendungsgebieten der Mathematik, das die Konvergenz einer Punktfolge in $\mathbb{J}$ benützt, nämlich aus der Wirtschaftsmathematik. Das Beispiel hat den Namen: Spinnwebmodell und kann nachgelesen werden bei Schneider, E.:

Einführung in die Wirtschaftstheorie, Band 2¹⁾ und Allan, R.G.D.: Mathematical economics²⁾.

Zum Verständnis des Beispiels sind allerdings gewisse Vorkenntnisse aus der Mathematisierung wirtschaftlicher Zusammenhänge nötig. Die Erarbeitung dieser Vorkenntnisse ist zu einem Mindestmaß nötig, um einzusehen, wie die Punkte der Punktfolge entstanden sind. Deshalb wurde das Beispiel nicht in das Schülerbuch aufgenommen. Methodisch könnte man es so verwerten, daß man es als ein Schülerreferat vergibt. Man müßte, so meine ich, zeitlich mindestens mit 45 bis 60 Minuten für die eingehende Beschäftigung mit dem Beispiel rechnen. Dabei sollte nicht außer Acht gelassen werden, daß die im Beispiel behandelte Nachfragekurve und die Angebotskurve etwas für den Schüler Neues ist und deshalb mehrere Punkte auf jeder dieser Kurven zunächst genau interpretiert werden müssen. Es sollte auch darauf geachtet werden, daß dem Schüler die Problemstellung zusätzlich bereits mit Hilfe des gesunden Menschenverstands einsichtig wird. Der Grenzwert der Punktfolge der im Beispiel Gleichgewichtspunkt genannt wird sollte auch inhaltlich plausibel sein. Verwendet man das Beispiel nicht als Schülerreferat, so besteht auch die Möglichkeit, es als Thema für eine Facharbeit einzusetzen.

1) Schneider, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie, Band 2. Tübingen 1967, S. 312 ff

2) Allen, R.G.D.: Mathematical economics, London 1965, S. 3 ff

3.3.2 Zu: 2.3.2 Konvergenzdefinition

Nachdem Folgen nun allgemein erklärt sind, kommen wir zum Hauptanliegen des Kapitels (Abschnitt 2.3.2), nämlich der Konvergenz von Folgen in allgemeinen topologischen Räumen. Wiederum soll nicht so vorgegangen werden, daß die Definition an den Anfang des Kapitels gestellt wird, sondern es soll vom Bekannten ausgehend die allgemeine Definition sich in natürlicher Weise ergeben. Die Verallgemeinerung soll einsichtig gemacht werden. Für die neue Definition soll beim Schüler ein gewisses Bedürfnis geweckt werden. Zu diesem Zweck wird die Eigenschaft Konvergenz als Sortiergesichtspunkt in einer Menge von Folgen eingeführt. Es werden dem Schüler zunächst geläufige Folgen in $\mathbb{R}$ vorgestellt und zwar wie in Aufgabe 51 (S. 126) zu sehen, bereits in zwei Klassen sortiert. Der Schüler soll nun den Sortiergesichtspunkt nennen. Dieses Vorgehen hat vor allem zwei Gründe: einmal meine Erfahrung, daß Schüler zwar ihnen vorgelegte Zahlenfolgen meistens ohne große Mühe in konvergente und nicht-konvergente Zahlenfolgen sortieren können, wogegen sie Schwierigkeiten haben, die Konvergenzdefinition für Folgen in $\mathbb{R}$ in befriedigender Form wiederzugeben. Die vorgestellte Rubrik ist ein guter Vorwand zur Wiederholung der Konvergenzdefinition in $\mathbb{R}$. Außerdem fällt es leichter, mit jemandem über die Konvergenzdefinition in $\mathbb{R}$ zu sprechen, der sie unmittelbar davor erfolgreich angewendet hat, als mit jemandem, der eine solche Erfahrung nicht unmittelbar vorher gemacht hat. Nach den Theorien der Lernpsychologie ist es nicht unwesentlich, welcher Zeitraum zwischen einem Erfolgserlebnis und einer erneuten Konfrontation mit dem zu Erlernenden liegt. Ein zweiter Grund für die Hereinnahme der Rubrik gerade an dieser Stelle des Lehrgangs ist der, daß der Schüler in Versuchung kommen soll, auch die unmittelbar vorher kennengelernten Folgen in $\mathbb{J}$ in die beiden Spalten der

Rubrik einordnen zu wollen. Zur Unterstützung werden zu diesem Zweck außerdem nach Frage b (S.127) Punktfolgen in angeboten. Der Schüler entscheidet intuitiv über Konvergenz oder Nichtkonvergenz der vorgelegten Punktfolgen. Der Lehrer kann nun unter Berufung auf das mathematische Verantwortungsgefühl der Schüler zu bedenken geben, ob die Entscheidung ohne Zuhilfenahme einer exakten Definition tatsächlich richtig ist oder nicht. Derartige Einwände werden den Schülern einleuchten. Es kann vorkommen, daß bereits bei den Beispielen für Punktfolgen, die vorangegangen sind, eine Diskussion über Konvergenz oder Nichtkonvergenz aufkam, weil möglicherweise Schüler über das Einsortieren geteilter Meinung waren. In diesem Fall wird das Bedürfnis für eine exakte Definition, die dann auch für Folgen in $\mathbb{R}$ gilt, besonders stark erlebt.

Bei der Suche nach einer Konvergenzdefinition, die auch auf Folgen in allgemeinen topologischen Räumen anzuwenden ist, wird der Schüler von selbst den Weg über die ihm schon bekannte Definition in $\mathbb{R}$ einschlagen. Hier hat der Lehrer allerdings die Aufgabe, zu beachten, daß der Schüler sich nicht in die Richtung verirrt, daß er als allgemeine Definition eine komponentenweise Konvergenz fordert, diese würde nur für die Räume $\mathbb{R}^n$ gelten. Gerade durch die Beispiele in $\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ könnte das jedoch bewirkt worden sein. Deshalb sollte in $\mathbb{R}$ die Definition der Konvergenz mit Hilfe des Begriffs Umgebung erfolgen. Zwar hat dann der Schüler die Hürde zu nehmen, daß er einsehen muß, daß die ihm bekannte Konvergenzdefinition mit ε und $N(\varepsilon)$ zur neuerdings formulierten äquivalent ist. Dies wird ihm aber keine Schwierigkeiten machen, wenn er die Begriffe Endstück und Umgebung vorher gründlich genug kennengelernt hat. Vielmehr wird sich die altbekannte Konvergenzdefinition ihm nun viel plastischer darstellen. Aufgabe 52 (S.129) ist nur als Erinnerung zu werten, damit der den Kurs im Selbststudium leistende Kollegiat

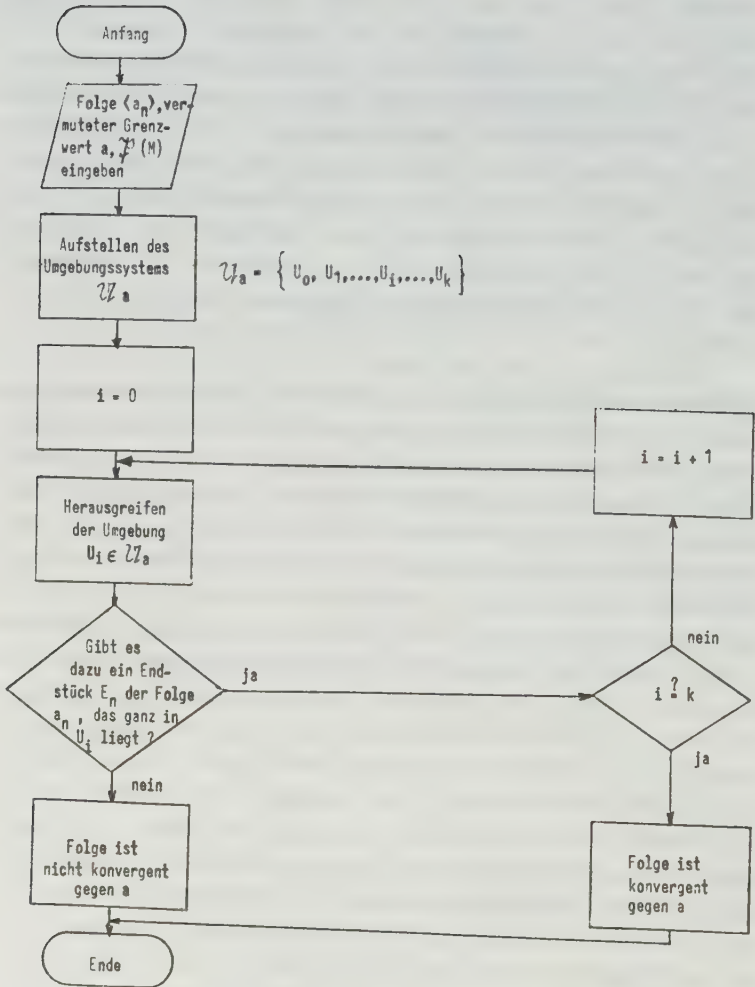
nicht zu rasch von der Äquivalenz der Definitionen überzeugt ist, ohne daß er sich dazu tiefere Gedanken gemacht hätte.

Dem Lehrer wie dem Schüler wird auffallen, daß in Aufgabe 52 nicht vorgeschrieben ist, welche Konvergenzdefinition er anwenden soll, um die drei gegebenen Folgen zu beurteilen. So steht es dem Schüler hier tatsächlich frei, die alte Konvergenzdefinition, die inhaltlich ja völlig mit der neuen übereinstimmt, zur Bearbeitung von Aufgabe 52 anzuwenden. Die Schwierigkeit bei Aufgabe 52 ist in jedem Fall die, daß ein Grenzwert zunächst vermutet werden muß, um dann erst die Konvergenzdefinition anwenden zu können. In Aufgabe 52 sind alle im Kommenden anzusprechenden Probleme enthalten: das Problem der Konvergenzbeurteilung ohne vorher genanntem Grenzwert, das Problem der Nichtkonvergenz und das Problem der Verwechslung Grenzwert und Häufungspunkt. Somit kann diese Aufgabe auch als Test dafür dienen, wie sicher die Schüler mit den oben genannten Problemen in $\mathbb{R}$ umgehen. Es ist eine Tendenz des modernen Mathematikunterrichtes, Aufgaben einzuschalten, die sich nicht nur unkompliziert mit einer vorangegangenen Definition befassen, sondern die die verschiedensten Probleme gleichzeitig aufwerfen.

Die Definition 20 der Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}$ wird nun auf allgemeine topologische Räume ausgeweitet. Definition 21 entsteht. Der Beweis von S. 132 wird - spezialisiert auf $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ - mündlich besprochen, damit die Schüler das Ersetzen des Begriffs Umgebungsbasis durch den Begriff Umgebungssystem für plausibel einsehen. Beim Betrachten der Kurzform von Definition 21 (S. 130) fällt auf, daß zu ihrem Verständnis der Schüler an die Abkürzung für das Umgebungssystem eines Punktes gewöhnt

sein sollte. Dann jedoch wird in dieser Kurzform die Bedeutung des Allquantors weit eindringlicher als bei der ausführlichen Form der Definition. Dort geht die Bezeichnung "zu jeder Umgebung" in der Anhäufung von Worten leichter unter als der Allquantor in der Kurzform. Auch erscheint die Bezeichnung "jede Umgebung" auf den ersten Blick unbestimmter als die Abkürzung in der das Reservoir, woraus die Umgebungen sind, nämlich das Umgebungssystem selbst, angesprochen wird. Von der Kurzform her gelingt den Schülern auch die Verneinung der Definition 21 leichter und somit wird die Festlegung des Begriffs "divergent" für den Schüler eindringlicher (Definition 23 und Satz 10, S. 130)

Wendet man diese Definition auf eine Folge in einem endlichen topologischen Raum an, so läßt sich diese Anwendung unter gewissen Voraussetzungen als Ablaufdiagramm darstellen. Man muß berücksichtigen, daß das Ablaufdiagramm nur für ein endliches $P(M)$ Sinn hat. Ich wählte das Mittel des Ablaufdiagramms, weil die Schüler des Kurses I dieses in der Informatik-Vorlesung bereits kennengelernt hatten. Es zeigte sich, daß die Schüler von dieser Form der Darstellung sehr angesprochen waren. Außerdem bringt die Beschäftigung mit dem Ablaufdiagramm mit sich, daß sich die Schüler auf einer allgemeineren Stufe (in Aufgabe 53 ist keine bestimmte Topologie vorgegeben) nochmals mit den Vorgängen bei der Konvergenzuntersuchung intensiv auseinandersetzen. Diese methodische Entscheidung hat folgenden Hintergrund: Verallgemeinernd gesprochen ist es nicht so, daß der Schüler das Fach Mathematik generell verabscheut. Vielmehr hat er vielfach zunächst eine Vorliebe für das in diesem Fach häufiger geforderte Aufgabenlösen. (Und zwar zieht er solche Aufgaben vor, bei denen nach einer einfachen Vorschrift vorgegangen werden muß). Der Schüler liebt



Ablaufdiagramm zu Aufgabe 51

an der Mathematik (wenn man verallgemeinernd sprechen will) den handwerklichen Aspekt. Beweise abstrakter Aussagen sieht er im krassen Gegensatz zu diesem handwerklichen Handeln als geistige Akrobatenleistung an und hat oft eine gewisse Abneigung dagegen. Der herkömmliche Mathematikunterricht stellt nun den Gegensatz dieser beiden Aspekte durch krasse Trennung beider Bereiche stärker heraus als der neuere Mathematikunterricht. Dieser versucht, beide Arten des Mathematik-Erlebens stärker zu mischen. Mein Vorschlag ist, Erlebnisfelder zu schaffen, die sowohl handwerkliches als auch abstraktes Handeln erfordern. Ein konkretes Beispiel zu diesem Vorschlag soll Aufgabe 53 sein. Nach der vorgenommenen Einteilung kann das Erstellen und Verstehen des Ablaufdiagramms weder ganz zum handwerklichen Handeln noch völlig zum abstrakten Erleben gezählt werden. Es zeigt von beiden Formen des Mathematik-Erlebens etwas.

Wie die Fußnote zu Aufgabe 53 sagt, sollte die Erstellung des Flußdiagramms nur dann gefordert werden, wenn der Schüler hierin bereits Fertigkeiten mitbringt. Die Lösung von Aufgabe 53 sieht dann wie auf der folgenden Seite zu sehen aus. Man sollte sich nicht an Einzelheiten stoßen, wenn der Schüler im Großen und Ganzen nur eine ähnliche Lösung bringt. Bei der Erstellung des Diagramms werden die üblichen Symbole verwendet. Eingabedaten sind neben der Folge selbst alle Teilmengen von M . Dies anzugeben ist nützlich als Hilfe für die Schüler. Diese sehen meist die Folge oder die Menge der Folgenpunkte als alleinige Eingabedaten an. Um dem Schüler Gelegenheit zu geben, das Eingabematerial zu nennen, kann der Lehrer zunächst die Frage aufwerfen, welche mathematischen Objekte der Definition 21 gemäß denn eigentlich untersucht würden. Die hauptsächlichen Stationen im Ablaufdiagramm sind dann das Aufstellen des Umgebungssystems, das Herausgreifen einer Umgebung, die Verzweigung, je nachdem, ob es zur

herausgegriffenen Umgebung ein Endstück der Folge gibt oder nicht, das ganz in der Umgebung liegt. Die Schleife zeigt an, daß es nötig ist, nach und nach alle Umgebungen der Entscheidungsfrage zu unterwerfen. Um dies zu bewerkstelligen, müssen die Umgebungen durchnummeriert werden und nach und nach alle Indizes durchlaufen werden. Am Ende steht die Aussage "die Folge ist konvergent gegen a " bzw. "die Folge ist nicht konvergent gegen a ".

Um die Notwendigkeit der Definition 22 einzusehen, kann der Lehrer noch diskutieren lassen, was zu tun ist, wenn die Entscheidung "die Folge ist nicht konvergent gegen a " gefällt worden ist. Es gilt herauszuarbeiten, daß es dann trotzdem sein kann, daß die Folge als konvergent bezeichnet werden muß, wenn sie nämlich konvergent gegen einen anderen Punkt ist.

Da bereits hinzugesetzt worden war, daß das Ablaufdiagramm nur praktische Bedeutung für Topologien mit endlich vielen offenen Mengen hat, werden in Aufgabe 54 und 55 solche Topologien vorgestellt. Nun zeigt es sich, daß es nützlich war, Folgen sehr sorgfältig als Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach einer beliebigen Menge herauszustellen. So dürfte der Schüler an dieser Stelle keine Schwierigkeiten haben, auch Folgen in einem Raum mit nur vier (bzw. fünf) Punkten zu betrachten. Während in Aufgabe 54 die Konvergenzdefinition 21 angewendet werden soll, d.h. jeweils Punkte vorgegeben werden, von denen gezeigt werden soll, ob sie als Grenzwert in Frage kommen, ist in Aufgabe 55 zu beantworten, ob die Folgen überhaupt als konvergent bezeichnet werden dürfen. Damit der Unterschied in der Fragestellung noch deutlicher zum Ausdruck kommt, wurde Aufgabe 55 so formuliert: "Sind sie konvergent gegen einen der fünf Punkte des Raumes M ?"

Von Aufgabe 54 gelingt nun eine gute Überleitung zu einem weiteren Ausbau der Konvergenzdefinition. Und zwar wurde die Aufgabe 54 so gewählt, daß es auffallen muß, daß es genügt, die zur Umgebungsbasis gehörenden Umgebungen von a daraufhin zu untersuchen, ob ein Endstück der Folge ganz in ihnen liegt. Die Frage ist nun, kann dieses Kriterium verallgemeinert werden? Es könnte ja sein, daß dies nur für die zufällig in Aufgabe 54 gewählte Topologie gilt.

Die Vermutung wird in Satz 11 formuliert und bewiesen. Der Beweis stellt keine allzu großen Anforderungen an die Schüler. Im Anschluß an den Beweis sollte eingesehen werden, daß dieser Satz eine Arbeitserleichterung mit sich bringt. Bei Topologien, die unendlich viele offene Mengen aufweisen, kann die Umgebungsbasis eines Punktes bereits weit übersichtlicher als das Umgebungssystem selbst sein. Das legt nahe, die Anwendung des Satzes 11 für Konvergenzuntersuchungen in einem Ablaufdiagramm ähnlich dem vorangegangenen zu veranschaulichen (Aufgabe 53). Für Folgen in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ kann fiktiv versucht werden, dieses Ablaufdiagramm aufzustellen. Man trifft dabei inhaltlich genau auf die alte ϵ -Definition. (S.128) Zu Punkten aus $\mathbb{R}$ gibt es abzählbare Umgebungsbasen z.B. stellen die $K(x, \xi)$ mit $\xi = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x dar. Das Ablaufdiagramm ist für Folgen aus $\mathbb{R}$ nur fiktiv, da es für konvergente Folgen aus $\mathbb{R}$ tatsächlich nötig wäre, die eingebaute Schleife des Ablaufdiagramms unendlich oft zu durchlaufen. Damit ist das Ablaufdiagramm als praktische Handhabe eigentlich wertlos. Als Mittel, die früher gepflegten Konvergenzbeweise nochmals inhaltlich zu vertiefen, ist es allerdings doch von Bedeutung, ist es doch so, daß Schüler die Technik $N(\epsilon)$ zu berechnen zwar beherrschen, aber sich oft nicht im klaren sind, was sie dabei eigentlich tun.

Zur Bearbeitung von Aufgaben 57 und 58 sind die Ablaufdiagramme eine nützliche Gedächtnisstütze. Ziel der Aufgaben 57 ff ist u.a. die Einsicht, daß das Konvergenzverhalten einer gegebenen Folge wesentlich davon abhängt, mit welcher Topologie der Raum ausgestattet ist, in dem sie erklärt ist. Zunächst wird in Aufgabe 57 das Verhalten von Folgen in Räumen angesprochen, die mit der sogenannten indiskreten Topologie (der kleinsten Topologie) ausgestattet sind. Behutsam soll hier der Schüler den Weg von konkreten Beispielen zu allgemeinen Aussagen geführt werden. Dies entspricht meiner Erfahrung, daß das Interesse an allgemeinen Aussagen - wird der Schüler mit einer ganzen Sammlung solcher konfrontiert - rasch abstumpft. Gerade dann umsomehr, wenn diese allgemeinen Aussagen rein deduktiv behandelt werden. Es ist eine der Grundhaltungen des denkenden Menschen, aus einzelnen Erfahrungen allgemeine Aussagen abzuleiten. Diesen Weg soll der Schüler im Bereich des Mathematiklernens sowohl erleben wie selbst beschreiten. Erst durch das Selbstbeschreiten erkennt er die möglichen Fehlhaltungen beim Bilden der allgemeinen Aussagen. Dieses Ziel ist zwar nicht nur das Anliegen des Faches Mathematik im Schulbereich - es sollte z.B. gerade auch vom Fach Physik und von anderen naturwissenschaftlichen Fächern angeboten werden - in der Mathematik werden jedoch die beim Bilden allgemeiner Aussagen nötigen Grundprinzipien - aber auch die dabei drohenden Fehlhaltungen - besonders deutlich.

Nachdem in der größten und in der kleinsten Topologie allgemeine Aussagen über Konvergenz von Folgen erarbeitet wurden, können diese beiden Aussagen zusammen gesehen werden und Anlaß geben, zu einer erneut allgemeineren Aussage: "Das Konvergenzverhalten einer gegebenen Folge in M hängt von der Topologie ab, mit der M ausgestattet ist". (S.134) Damit auch diese Aussage nicht als vorschnelle Verallgemeinerung gilt, wird in Aufgabe 59 verlangt, ein

demonstratives Beispiel zu finden, das diese Aussage unterstreicht. In dem Bestreben, auch vom Schüler selbst Beispiele für besondere mathematische Erscheinungen finden zu lassen, sehe ich ein spezielles didaktisches Anliegen, das nicht vernachlässigt werden sollte.

Bei der Bearbeitung von Aufgabe 57 wurde deutlich, daß es Folgen mit mehr als einem Grenzwert geben kann. Dies muß an dieser Stelle unbedingt festgehalten werden und dient dazu, den kommenden Abschnitt einzuleiten. Die Schüler sind (so meine Erfahrung in Kurs I) ziemlich verblüfft, wenn man die Frage "ein oder mehrere Grenzwerte" statt auf Folgen in einem unanschaulichen Raum wie in Aufgabe 57 auf Folgen in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ anwendet. Einige Schüler waren sofort sehr sicher, daß Folgen in $\mathbb{R}$ stets nur höchstens einen Grenzwert haben, andere ließen sich durch das Problem völlig verwirren und nannten als Beispiele für Folgen mit - wie sie glaubten - 2 Grenzwerten Folgen mit 2 Häufungspunkten. Von den Mitschülern aufmerksam gemacht, daß die Beispiele keine konvergenten Folgen seien, retteten sie sich mit der Bemerkung: "Doch, das sind 2 konvergente Folgen." Man konnte sehen, daß hier die Begriffe "Folge" und "Teilfolge" durcheinanderkamen.

Der kommende Abschnitt ist der Suche nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen gewidmet, dafür, daß alle Folgen in einem topologischen Raum höchstens einen Grenzwert haben. Wir werden nur bis zum Auffinden einer hinreichenden Bedingung kommen, nämlich der Aussage, daß in einem Hausdorff-Raum jede Folge höchstens einen Grenzwert hat (Satz 12, S. 140). Die Suche an sich erfüllt bereits wichtige mathematik-didaktische Ziele, welche auf S. 36 ff geschildert wurden. Auch wenn sich wohl kein Beleg aus der Mathematik-Geschichte dafür finden lassen wird, daß die Aussage des Satzes 12 auf dem hier vorgeführten Weg gefunden wurde, kann der Schüler wichtige allgemeine Fähigkeiten erwerben,

wenn der Suche nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen oben erwähnter Art ausreichend viel Zeit im Unterricht gegeben wird.

Stellt man sich auf den Standpunkt, man kenne die Aussage des späteren Satzes 12 noch nicht, so wird man nicht auf geradem Wege unmittelbar die Vermutung haben, daß es die Eigenschaft hausdorffsch eines topologischen Raumes ist, die für dieses Konvergenzverhalten von Folge verantwortlich ist. Vielleicht wird man erst durch Sichtung von vielerlei Beispielen diese Vermutung äußern. Die Vermutung der Aussage des Satzes 12 wird für den Schüler nicht unmittelbar naheliegend sein. Eine naheliegendere Vermutung wäre möglicherweise die, daß es gerade die metrischen Räume sind, in denen Folgen höchstens einen Grenzwert haben. (Es stellt sich später heraus, metrische Räume sind hausdorffsch). Somit formulieren wir die Fragestellung zunächst folgendermaßen: Kann eine Klasse von topologischen Räumen gefunden werden, in denen Folgen höchstens einen Grenzwert haben? Mit der Antwort: die Klasse der metrischen Räume hat diese Eigenschaft, geben wir uns nicht zufrieden, sondern vermuten, daß es vielleicht noch außerhalb dieser Klasse topologische Räume gibt, in denen Folgen höchstens einen Grenzwert haben. Bevor wir daran gehen, hinsichtlich dieser Vermutung weitere Beispiele zu sichten, müssen wir uns über ihren Inhalt völlig klar sein. Hier macht dem Schüler eventuelle bereits der Ausdruck "höchstens ein" Schwierigkeiten. Oft werden die Bedeutungen von "höchstens ein" und "mindestens ein" verwechselt. Der Klärung dieser Begriffe dient die Aufgabe 60.

Nun gehen wir daran, Beispiele zu sammeln. (S. 136-139). Da wir bereits früher festgestellt haben, daß das Konvergenzverhalten einer Folge davon abhängt, mit welcher Topologie der Raum ausgestattet ist, in dem die Folge erklärt ist, können wir uns zunächst auf eine Folge und eine Trägermenge der Topologie konzentrieren und

und die Topologien entsprechend variieren. Als Folge sollte freilich keine triviale (konstante) Folge genommen werden. Wir legen uns zu diesem Zweck eine Folge aus $\mathbb{J}$ vor, und stattdessen dann $\mathbb{J}$ mit zweierlei Topologien aus - einmal mit der natürlichen Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{J}}$, dann mit $\mathcal{S}$, einer der sogenannten Streifentopologien (siehe S. 90 ff). Aufgabe 62 gibt nun

Hilfestellung bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens der gegebenen Folge in den zweierlei Räumen. Das Beispiel ist so konstruiert, daß die Folge in der Streifentopologie unendlich viele Grenzwerte hat, während sie in der üblichen Topologie nur einen Grenzwert hat. Hat man gemäß Aufgabe 62 einige Punkte der Punktfolge in ein Koordinatensystem eingezeichnet, so wird die Ursache für das unterschiedliche Konvergenzverhalten sehr deutlich. Die Streifentopologie war so gewählt, daß die sie erzeugenden Streifen gerade parallel verliefen zu der Geraden auf der alle Punkte der Punktfolge liegen. Bei der Streifentopologie ist von früher bekannt, daß sie zu einer speziellen Klasse von Topologien gehört, nämlich zu den nicht-hausdorffschen Räumen. Somit ist man der Vermutung etwas näher gekommen, daß "die Klasse der hausdorffschen topologischen Räume" eine Antwort auf unsere obige Fragestellung ist. Diese Vermutung, deren Auffinden durch den Lehrer und das Schülerbuch gelenkt worden ist, soll nun durch weitere Beispiele erhärtet werden, und zwar gehen wir dazu in drei verschiedene Punktmengen: zunächst eine endliche Punktmenge, dann die Menge der reellen Zahlen und dann die Menge der Punkte der Ebene. Jede dieser drei Punktmengen wird je einmal mit einer hausdorffschen Topologie ausgestattet und dann mit einer nicht-hausdorffschen. Am günstigsten wäre es nun, die zu jeder Punktmenge gehörenden beiden Topologien in zwei Spalten nebeneinander stellen zu können; denn es sollen nun in beiden Topologien über die selben Folgen Konvergenzbetrachtungen angestellt werden, gerade um sehr

eindrucksvoll die mögliche Veränderung im Konvergenzverhalten zu demonstrieren. Die Teilung der Seite in zwei Spalten wurde im Schülerbuch aus drucktechnischen Gründen nicht durchgeführt. Die Spalten wären einzeln zu schmal geworden. Deshalb wird im Schülerbuch auf Seite 136 und 138 der Inhalt der Spalte "Folgen in hausdorffschen Räumen" gesammelt und auf Seite 137 und 139 der Inhalt der Spalte "Folgen in nicht-hausdorffschen Räumen". Allerdings geht dadurch die eindrucksvolle Wirkung des Nebeneinanderstehens verloren, es sei denn man bindet das Schülerbuch entsprechend. In der Besprechung soll jedoch jede Punktmenge in beiden Spalten unmittelbar aufeinanderfolgend behandelt werden. Die einzelnen Folgen in den einzelnen Räumen können vom Schüler zur Übung auf ihr Konvergenzverhalten untersucht werden. Somit erstellt er nach und nach erst die Aussagen in den einzelnen Räumen, welche hier im Schülerbuch unmittelbar fertig angegeben werden. Will der Lehrer Zeit sparen, so kann er die Zusammenstellung ohne Vorarbeit übernehmen, sollte dann aber die Schüler dazu bringen, wenigstens die Begründungen für die Konvergenzaussagen selbst vorzunehmen. Außer den angegebenen Folgen können die Schüler natürlich weiteres Beispielmateriale beisteuern. Ich würde aber davon abraten, die Beispiele ausschließlich von den Schülern nennen zu lassen, da es darauf ankommt, möglichst vielerlei Typen von Konvergenzverhaltensänderung zu bekommen. Beispiel: Erst ein Grenzwert, dann zwei Grenzwerte; erst kein Grenzwert, dann zwei Grenzwerte; usw.

Für die endliche Menge aus drei Punkten ist die Potenzmenge die einzige hausdorffsche Topologie. Das wurde in Aufgabe 32, S.94, für alle endlichen Topologien bewiesen. Nun werden sechs verschiedene Folgen als Beispiele angeboten, wovon drei sich als konvergent gegen genau einen Grenzwert erweisen und die drei anderen sich als nicht

konvergent erweisen. In diesem topologischen Raum läßt sich eine allgemeine Aussage, welche Gestalt konvergente Folgen haben müssen, aufstellen. Dazu wird u.a. die Erfahrung aus Aufgabe 55 herangezogen. Mit Hilfe der Aussage kann man folgern, daß Folgen mit mehr als einem Grenzwert nicht auftreten können. Auf Seite 137 wird M mit einer nicht-hausdorffschen Topologie ausgestattet. Dieselben Folgen wie auf S. 136 oben weisen nun ein anderes Konvergenzverhalten auf. Zwei der Folgen, die vorher genau einen Grenzwert aufwiesen, haben nun zwei, eine der Folgen, die vorher nicht konvergent waren, weist nun zwei Grenzwerte auf. Das Fazit ist, in diesem topologischen Raum gibt es auch Folgen, die mehr als einen Grenzwert haben.

Nun werden sechs verschiedene Folgen in $\mathbb{R}$ untersucht, und zwar zunächst unter der Bedingung, daß $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie ausgestattet sei. Dann sieht man, daß drei der Folgen jeweils genau einen Grenzwert besitzen und die drei anderen nicht konvergent sind. Diese Entscheidungen über das Konvergenzverhalten kann der Schüler aufgrund seiner Erfahrungen zur Konvergenz von Zahlenfolgen rasch nachvollziehen. Die übliche Topologie von $\mathbb{R}$ ist uns als Beispiel für einen hausdorffschen Raum bekannt. Nun stattdessen wir $\mathbb{R}$ andererseits mit einer nicht-hausdorffschen Topologie aus. Diese habe als Basis die Menge der offenen Intervalle aus $\mathbb{R}$, die den Punkt 0 enthalten. In dieser Topologie kommt es vor, daß eine der Folgen aus den vorhin genannten Beispielen nun statt eines Grenzwertes sogar unendlich viele Grenzwerte hat, nämlich alle Punkte größer oder gleich 1.

Daran anschließend werden Folgen in $\mathbb{J}$ betrachtet, wobei $\mathbb{J}$ zunächst mit der natürlichen Topologie (hausdorffsch) ausgestattet ist. Die ersten drei Folgen sind konvergente Folgen mit genau einem Grenzwert. Das vierte, fünfte und sechste Beispiel konvergiert in obigem topologischen Raum nicht. Nun geht man zu einer nicht-hausdorffschen Topologie auf $\mathbb{J}$ über. Wir verwenden eine Streifentopologie. Die Streifentopologie sei erzeugt durch alle zur x_1 -Achse parallelen Streifen. Dann konvergieren die ersten vier Folgen nun jeweils gegen unendlich viele Punkte. Sie haben nun also mehr als einen Grenzwert.

Nach so langer Vorarbeit sind wir genügend motiviert, an die bereits bei der Bearbeitung von Aufgabe 62 (S.135) geäußerte Vermutung zu glauben, daß die Klasse der hausdorffschen Räume in puncto Konvergenzverhalten von Folgen etwas Besonderes aufweist, nämlich daß in jedem hausdorffschen Raum Folgen höchstens einen Grenzwert haben. Satz 12 wird formuliert und ist zu beweisen. Wird eine Beweis-skizze vorher in der Klassengemeinschaft gemeinsam erarbeitet, so kann verlangt werden, daß der Beweis anschließend vom Schüler selbständig geführt wird. Wichtig ist bei der Vorbesprechung, daß möglichst viele Schüler die Beweis-idee selbst finden. Für das Auffinden der Beweis-idee spielt die Erfahrung des Schülers eine große Rolle. Hat der Schüler schon mehrfach Sätze, in denen der Ausdruck "höchstens ein" vorkam, bewiesen, so wird er sich daran erinnern, daß dann sehr oft die Beweis-idee zum Erfolg führte, von "mehr als einem" auszugehen und dies zum Widerspruch zu führen. So ist das Vorgehen bei dem vorliegenden Beweis.

Nach Bearbeitung des Satzes 12 könnte der Schüler leicht die Vorstellung haben, daß in einem nicht-hausdorffschen

Raum jede Folge mehrere Grenzwerte aufweist. Wird das Thema nicht weiter angeschnitten, so bleibt die Gefahr, daß diese Vorstellung latent beim Schüler vorhanden ist. Dem beugt Aufgabe 63 bewußt vor.

Eine andere Aussage, deren Gültigkeit man vermuten könnte, ist die: Hat in einem topologischen Raum $(M, \mathcal{T})$ jede Folge höchstens einen Grenzwert, dann ist $(M, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher Raum. Die Aussage ist nicht wahr. Zur Demonstration dieser Tatsache steht uns auf S. 141 das Beispiel 33 zur Verfügung. Allerdings fordern die Begründungen vom Schüler einige Anstrengung. Da wir das Beispiel jedoch auf S. 217 nochmals heranziehen wollen, lohnt sich die Mühe.

3.3.3 Zu: 2.3.3 Konvergenzkriterien

Zu Beginn des Abschnitts wird die Frage aufgeworfen: Wie beweist man die Nichtkonvergenz einer Folge? Will man dies mit Hilfe der Konvergenzdefinition - und ein anderes Mittel steht derzeit noch nicht zur Verfügung - so muß von jedem Punkt des Raumes bewiesen werden, daß er nicht Grenzwert der Folge ist. Absichtlich wurde eine Folge aus $\mathbb{N}$ an den Anfang gestellt, da die Problematik bei Folgen in $\mathbb{R}$ nicht mehr gleich stark empfunden würde, da dem Schüler Folgen aus $\mathbb{R}$ zu nah sind. Die Folge in $\mathbb{N}$ wurde provozierend so gewählt, daß die x_2 -Werte der Folgenpunkte stets um 1 größer werden, also unbegrenzt wachsen. Daraus schließt der Schüler intuitiv, daß die Punktfolge nicht konvergiert. Man muß ihm jedoch vor Augen führen, daß er bei diesem Schluß kein bereits vorhandenes Konvergenzkriterium verwendet hat, daß es also eigentlich nötig wäre, für jeden Punkt des Raumes zu zeigen, er ist nicht Grenzwert der Folge. Will man die Definition 21 oder auch Satz 11 auf eine Folge anwenden, so ist es stets nötig, von einem vermuteten oder vorgegebenen Grenzwert auszugehen. Bei Nichtkonvergenz muß nacheinander jeder Punkt des Raumes diese Rolle übernehmen. Dies ist freilich für einen Raum mit unendlich vielen Punkten praktisch undurchführbar. Im Gegensatz zu diesem Verfahren kannten wir in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ Konvergenzkriterien, die ohne einen vermuteten Grenzwert auskamen. Diese Kriterien werden auf S. 143 nochmals zusammengestellt und die Frage aufgeworfen, ob sie auch auf allgemeine topologische Räume ausgeweitet werden können.

Es werden folgende Bedingungen für Konvergenz zusammengestellt:

- a) Eine hinreichende¹⁾ Bedingung: "Jede monoton wachsende nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent."
- b) Eine notwendige¹⁾ und hinreichende¹⁾ Bedingung: Das Cauchysche Konvergenzkriterium.
- c) Und eine notwendige¹⁾ Bedingung: "Jede in $\mathbb{R}$ konvergente Folge ist beschränkt."

Die in den Bedingungen a) und c) vorkommende Bezeichnung "beschränkt" (genauer: "beschränkte Menge") kann nur in solchen Räumen definiert werden, in denen wir eine Metrik besitzen. Für metrische Räume wird nun untersucht, ob die Kriterien a), b) und c) Gültigkeit besitzen. Die Aussage c) verwendeten wir bereits bei der Entscheidung, daß die zu Beginn des Abschnitts angegebene Folge in $\mathbb{J}$ nicht konvergent ist.

Das wichtigste Anliegen dieses Kapitels sind jedoch die Cauchy-Folgen.²⁾ Es wird ohne weiteres eingesehen, daß das Cauchysche Kriterium in metrischen Räumen definierbar ist. Der Schüler ist dann aber leicht versucht, Cauchysche Konvergenz und Konvergenz nach Definition 21 sofort als äquivalent anzusehen, denn das ist der Schüler von den Folgen in $\mathbb{R}$ her gewöhnt. Wir führen nun zunächst für Folgen, die dem Cauchyschen Kriterium genügen, die Bezeichnung "Cauchy-Folgen" ein. Dann stellt sich

-
- 1) Die Attribute "notwendig" und "hinreichend" beziehen sich auf die Anwendung der Bedingungen auf Folgen in $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$
 - 2) Das Cauchysche Konvergenzkriterium war meinen Schülern des Kurses I für Folgen in $\mathbb{R}$ bekannt.

das Problem, ob

- 1) jede konvergente Folge (nach Definition 21) auch eine Cauchy-Folge ist und ob
- 2) jede Cauchy-Folge auch nach Definition 21 konvergent ist.

Die erste Aussage kann in metrischen Räumen allgemein bewiesen werden. Der Beweis ist nicht allzu anspruchsvoll (er verwendet hauptsächlich die Dreiecksungleichung), so daß er auch selbständig von den Schülern erbracht werden kann. Die zweite Aussage ist nicht in jedem metrischen Raum gültig. Dafür ist ein Beispiel im Schülerbuch angegeben. Das Beispiel sollte natürlich eingehend vom Schüler untersucht werden und die fehlenden Beweise dazu nachgeliefert werden. Die Begründung lautet dann z.B. für b) so: In $(\mathbb{R}^2, d)$ konvergiert die Folge $\langle (\frac{1}{n} | \frac{1}{n}) \rangle$ gegen $(0|0)$. Da $(\mathbb{R}^2, d)$ hausdorffsch ist, ist dies zugleich der einzige Grenzwert, den diese Folge in $(\mathbb{R}^2, d)$ hat. Im angegebenen (E, d) ist die Folge somit nicht konvergent, da $(0|0) \notin E$.

Um den Abschnitt abzurunden, wird die Bezeichnung "vollständiger topologischer Raum" für solche topologischen Räume eingeführt, in denen jede Cauchy-Folge konvergent ist. Weiter wird die Theorie der vollständigen Räume jedoch nicht ausgeführt. Wichtig ist jedoch, daß sich das Cauchy-Kriterium nach der Behandlung dieses Abschnitts in einem völlig neuen Licht zeigt. Vor allem im Hinblick auf das Verständnis des Schülers von $\mathbb{R}$ ist dies von großer Bedeutung.

3.4 Zu: 2.4 Häufungspunkt

Die Überschrift zu Kapitel 2.4 müßte eigentlich - wie aus dem folgenden kurzen Überblick zu ersehen ist - heißen: "Was mit dem Begriff Häufungspunkt einer Menge zusammenhängt". Diese Formulierung paßt aber stilistisch nicht zu den anderen Überschriften und so behelfe ich mich mit obiger kurzer Formulierung.

Die Begriffe abgeschlossene Hülle und Häufungspunkt einer Menge sind in der Topologie sehr wichtig. Obwohl der vorliegende Kurs aus zeitlichen¹⁾ Gründen nur wenige der sogenannten interessanten, mit der Hüllenbildung zusammenhängenden Aussagen bringt, messe ich dem Kapitel 2.4 große didaktische Bedeutung bei. Einmal um der wenigen sogenannten interessanten Aussagen willen, die immerhin erarbeitet werden können, zum anderen um der Begriffe Rand, Inneres, Äußeres einer Menge willen, die wir hier mit Hilfe des Hüllenbegriffs definieren. Die Definition dieser Begriffe ist wiederum deshalb von didaktischer Bedeutung, da an diesen Begriffen das Sich-Lösen von der Anschauung (eines der Argumente für die Beschäftigung mit der Topologie in der Schule) besonders deutlich und zugleich leicht zugänglich demonstriert werden kann.

Im Überblick gesehen baut sich das Kapitel so auf: Zunächst wird induktiv auf die Definitionen des Häufungspunktes

1) Zum Teil ist die Beschränkung der Stoffauswahl auch dadurch begründet, daß Begriffe, bei deren Einführung mit größeren didaktisch-methodischen Schwierigkeiten zu rechnen ist, im vorliegenden Kurs umgangen werden - z.B. der Begriff des Filters.

und des isolierten Punktes hingeführt. An Beispielen hat der Schüler dann die Gelegenheit zu erspüren, daß Aussagen über Häufungspunkte von Teilmengen eines vorgegebenen topologischen Raumes viel über die Struktur des Raumes verraten. Besonders deutlich kann dies an den Beispielen diskrete Topologie, indiskrete Topologie eingesehen und auch vom Schüler selbsttätig erarbeitet werden.

Ein weiteres wichtiges Anliegen des Kapitels 2.4 ist die Aussage: Durch Vereinigung einer Menge A mit der Menge ihrer Häufungspunkte erhält man die abgeschlossene Hülle von A (= kleinste abgeschlossene Obermenge von A). Diese Passage des Kurses bringt zweierlei Gewinn: einmal in fachlich-didaktischer Hinsicht einen Gewinn für den Gesamtaufbau des Kurses - also die Globalziele des Kurses betreffend -, dann aber auch einen Gewinn, hinsichtlich des Trainings allgemeiner mathematischer Fähigkeiten, da das Deduzieren (Beweisen) in dieser Passage ein derartiges Gewicht hat.

Der Fachmathematiker wird die Definition des Begriffs Berührungspunkt in diesem Abschnitt vermissen, der in allen Standardwerken der Topologie eingeführt wird. Ich will im vorliegenden Kurs die Bezeichnung Berührungspunkt jedoch nicht eigens einführen, um die doch beträchtliche Zahl von Definitionen nicht unnötig zu vergrößern. Wie der Kurs zeigt, kommt man ohne Gebrauch der Bezeichnung Berührungspunkt aus. Vor die Wahl gestellt, sich zwischen der Einführung und Verwendung des Begriffs Häufungspunkt und der des Begriffs Berührungspunkt entscheiden zu müssen, zog ich den Begriff Häufungspunkt vor. Für diese Entscheidung spricht, daß die Schüler meist aus dem Analysis-Unterricht bereits etwas vom Häufungspunkt einer Folge gehört haben. Die Ähnlichkeit des Wortlauts der Bezeichnungen macht den Schüler neugierig. Auf Seite 150 des Schülerbuches wird

der Zusammenhang der beiden Begriffe erläutert (Genauerer siehe S.350) und der Schüler auf die notwendige Unterscheidung aufmerksam gemacht.

Im Zuge des Beweises zum Satz: "Die Vereinigung einer Menge A mit der Menge ihrer Häufungspunkte ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von A." werden die meisten der allgemeinen Eigenschaften der Hüllenbildung erarbeitet. Dies verhilft wesentlich zu einem besseren Verständnis des Begriffs "abgeschlossene Hülle" an sich und liefert nützliche Voraussetzungen für das Arbeiten mit diesem Begriff in den folgenden Passagen des Kurses.

Die Begriffe Inneres, Äußeres, Rand einer Menge werden mit Hilfe des Hüllenbegriffs definiert. Für das Innere ist dies in den meisten Lehrbüchern nicht der übliche Weg, sondern dort wird das Innere von A zunächst als größte offene Menge, die in A enthalten ist, eingeführt. Der Abgerundetheit des Kapitels halber und auch vor allem der methodisch vorteilhaften Brücke zur Anschauung halber (siehe Beispiele aus $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$) erweist sich der im Kurs eingeschlagene Weg für die Schule als günstig.

Wie eine Reihe anderer Begriffe so kann auch der Begriff "zusammenhängend" aus Zeitgründen nicht gebracht werden. Er würde sich jedoch, da mit den im Kurs bereitgestellten Mitteln leicht auch im Selbststudium einsehbar, für die Erörterung in einer Schüler-Facharbeit eignen. Ein fachlich, d.h. in der Topologie beschlagener Lehrer - und davon sollte ausgegangen werden¹⁾ kann und soll weitere mit dem Hüllen-Begriff zusammenhängende Begriffe und Aus-

1) siehe S. 53 a

sagen bringen, auch wenn sie nicht ins Schülerbuch aufgenommen wurden, wenn seine Klasse schneller vorankommt als bei der Planung des Kurses angenommen und erprobt. Daß der Lehrer dann das Schülerbuch nicht verwenden kann, weil es diese Begriffe nicht bringt, ist pädagogische Absicht. Ein Wechsel¹⁾ zwischen ausführlichem Schülerbuch und knappem Fach-Lehrbuch im Unterricht der gymnasialen Oberstufe ist für den Mathematikunterricht meines Wissens leider noch nicht erprobt worden, obwohl diese Idee meiner Meinung nach nur eine natürliche Konsequenz der pädagogischen Absichten der Kollegstufe darstellt und ich mir positive Auswirkungen davon verspreche.

1) gemeint ist die Verwendung beider als Arbeitsbuch

3.4.1 Zu: 2.4.1 Häufungspunkt einer Menge

Die Grundidee der Hinführung¹⁾ auf den Begriff Häufungspunkt einer Menge läßt sich wie folgt umreißen: Man geht von Beispielen in $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{\mathbb{N}})$ aus und nützt dort die anschauliche Bedeutung der Häufungspunkte einer Menge aus, nämlich das "Besonders-nahe-bei-Liegen". Dies fällt natürlich bei den Häufungspunkten einer Menge, die nicht zu ihr gehören, stärker ins Auge als bei den zur Menge gehörenden. Bei letzteren ist das Nahe-bei-der-Menge-Liegen zu selbstverständlich als daß es auffallen würde. Hat man ausgehend vom Spezialfall des nicht zu A gehörenden Häufungspunktes von A die Definition 27 erarbeitet, so erkennt der Schüler nachträglich, daß es auch Punkte der Menge A gibt (bei geeigneter Vorgabe von A), die der Definition 27 genügen. Dies erscheint dem Schüler dann vollkommen plausibel. Es ist didaktisch durchaus legitim vom Spezialfall zur allgemeinen Definition zu leiten (Schlagwort: "Vom Besonderen zum Allgemeinen"). Dies galt sogar lange Zeit als das einzig richtige methodische Prinzip für die Schulmathematik. Das umgekehrte methodische Vorgehen, welches Dienes drastisch aber treffend mit dem Bild vom "tiefen Ende" des Schwimmbeckens beschreibt und vertritt, erhält das Schlagwort "Vom Allgemeinen zum Besonderen". Die Diskussion darüber, welche der beiden Vorgehensweisen die richtige ist, ist noch lange nicht entschieden.²⁾

1) Der vorliegende Kurs hat sich grundsätzlich dem induktiven Prinzip verschrieben. Siehe S. 17 ff

2) siehe z.B. den Vortrag auf der 10. Bundestagung für Didaktik der Mathematik in Augsburg von Prof. Wagemann, Gießen.

Im Detail geschildert könnte man etwa so auf Definition 27 hinführen:

(Die Unterrichtsform sei der Dialog Schüler-Schüler-Lehrer). Der Lehrer gibt ein offenes Intervall aus $\mathbb{R}$ vor z.B. $I = (-1; 1)$ und zwei Punkte, die zu I liegen wie 1 und 1,5. Man frage nach der Beziehung der Punkte zur Menge I . Über Beziehungen zwischen Punkten und Mengen wurde früher schon gesprochen, nämlich von der $\in$ -Relation, so daß zunächst die Aussage $1 \notin (-1; 1)$ und $1,5 \notin (-1; 1)$ von den Schülern kommt. Der Lehrer hebt an dieser richtigen Antwort hervor, daß damit eine Gemeinsamkeit der beiden Punkte gefunden sei. Er fragt, ob sich nicht auch Unterschiede in der Beziehung der Punkte zur Menge I finden ließen.

Die Schüler finden die Antwort: "1 liegt näher an der Menge 'dran' als 1,5." Es wird weitergeführt zu der Erkenntnis: "1 nimmt hinsichtlich der Nähe zur Menge eine Sonderstellung unter den Punkten 1; 1,5; 1,2; 1,3; 1,1 ein". Impulsivere Schüler sagen vielleicht sogar: "Bei den Punkten 1,5; 1,3; 1,2; 1,1 kann ich immer noch einen Punkt zwischen die Menge und den gegebenen Punkt schieben, ohne schon in die Menge I zu kommen".

Diese und sinngemäße Antworten können dann unter Verwendung des Umgebungsbegriffs ausgebaut werden. Das nächste Ziel ist hierbei eine Aussage der Art: "Zu den Punkten 1,5; 1,3; ... kann ich immer eine (im Sinn von mindestens eine) Umgebung finden, die mit I keinen Punkt gemeinsam hat". Nun braucht der Lehrer nur noch den kleinen Anstoß (wenn überhaupt nötig) zu geben: "... und zu 1?" Die prompte Antwort: "Da geht das nicht" wird dann gemeinsam in ihre ausführliche Form gebracht. Damit ist man bei Definition 27 angelangt.

Da im Schülerbuch diese dialogische Form des Auffindens der Definition nicht durchführbar ist, wird dort vor die Definition noch ein zusätzliches hinführendes Beispiel gestellt. Es wird bewußt die Wertemenge der dem Schüler sehr geläufigen Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ herangezogen. Den Grenzwert 0 der Folge weiß jeder Schüler des Kurses sofort. Der Schüler hat offen oder latent auch stets zusätzlich die dynamische Vorstellung von einer konvergenten Folge wie es auf S. 315 geschildert wird. Etwa die Sprechweise, daß die Punkte $\frac{1}{n}$ für immer größer werdendes n der Null immer näher kommen, zeugt für obige Behauptung. Hier kann nun eingehakt werden und das Liegt-nahe-bei vom Grenzwert aus gesehen untersucht werden. Wie "nahe" liegt 0 zur Menge $B = \{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \}$? Bei dieser Frage muß der Lehrer vor allem das Wort "Menge" betonen, damit die Schüler nicht auf den Begriff Häufungspunkt einer Folge abirren.

Gerade die Verschiedenheit der Mengen I und B auf S. 145 wirkt sich günstig auf die Begriffsbildung aus. Bei Definition 27 machte ich die Erfahrung, daß die ausführliche Form den Schülern leichter zugänglich bleibt (auch immer wieder bei den Anwendungen herangezogen wird) als die formalisierte Kurzform. Die im Skriptum angegebene Kurzform und auch andere, die der Schüler selbst aufstellen soll, müssen vertraut gemacht werden, da sie in den Beweisen zu den Sätzen 13 ff verwendet werden. Aufgabe 66 ist in diesem Zusammenhang ebenfalls sehr wichtig. Die zur Definition 27 äquivalente Aussage (2) aus Aufgabe 66 nennen wir im folgenden der Kürze wegen einfach Definition 27* (siehe S. 149).

Beispiel 34 führt nun auf die Erkenntnis, daß Häufungspunkte einer Menge auch zu dieser gehören können. Dies ist wie auf S.346 erläutert auf Grund des gewählten Verfahrens der Hinführung auf Definition 27 methodisch notwendig. Die Beschreibung der vorgegebenen Menge D als Vereinigungsmenge macht die Schüler zunächst stutzig, sie kommen dann aber doch rasch damit zurecht. Bewußt ist die Stufung der Beispiele 34, 35, 36 vorgenommen. Das Material von Beispiel 35 brauchen wir noch im Abschnitt über die abgeschlossene Hülle.

Beispiel 36, das sich mit den Häufungspunkten von $\mathbb{Q}$ befaßt, wurde in die zwei Teilaufgaben (a) und (b) gegliedert, um dem Schüler die Arbeit zu erleichtern. Die Erkenntnisse aus Beispiel 36 sind zentral für die Einsicht in die topologische Struktur von $\mathbb{R}$ (siehe hierzu auch S.160).

Als nächstes wird anhand eines Beispiels auf den Begriff isolierter Punkt herangeführt. Die Skizze hilft, die Aussage über die Punkte $\frac{1}{m} \in B$ einsichtig zu machen. An den vorgelegten Mengen werden zunächst nur die Punkte herausgestellt, die nicht Häufungspunkte der jeweiligen Menge sind. Def. 28 stellt sich somit zunächst als Einführung einer eigenen Bezeichnung für Nicht-Häufungspunkte vor. Anhand der Definition 27 kann dann mit Hilfe der Negationsregeln ein Kriterium für isolierte Punkte ausgesprochen werden, das den Umgebungsbegriff benützt (Aufgabe 69).

Die Beispiele 37 und 38 dienen sowohl der Einübung der Definition 28 wie als Anstoß zum Nachdenken über das Vorhandensein von isolierten Punkten und Häufungspunkten.

Beispiel 39 beschäftigt sich dann mit einem Beispiel aus einem endlichen topologischen Raum. Dies bildet den Übergang zu Aufgaben und Beispielen, die auf das Auffinden allgemeiner Aussagen über den Zusammenhang Menge der Häufungspunkte einer Menge und Topologie des Raumes zielen. Damit sind Fragen angeschnitten, die ohne Hilfe der Anschauung beantwortet werden müssen. Nur Aufgabe 71 stellt hierin eine Ausnahme dar. In ihr werden Mengen aus $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ auf ihre Häufungspunkte hin untersucht, wodurch wir auch für den folgenden Abschnitt "abgeschlossene Hülle" Beispielmateriale sammeln.

Die Aufgabe 73 ist die konkrete Vorübung zu der allgemeinen Frage der Aufgabe 74. Aufgabe 75 befaßt sich mit Häufungspunkten in der diskreten Topologie. Daß die Mächtigkeit der Trägermenge einer Topologie auch 1 sein kann, wird vom Schüler ohne den Hinweis "mit mindestens 2 Elementen" nicht beachtet. Die einpunktige Topologie ist für die vorgelegte Fragestellung ohnehin uninteressant. Eine zusätzliche kleine Übungsaufgabe wäre, die möglichen Topologien einer zweipunktigen Menge zusammenzustellen und die Fragen der Aufgaben 73 bis 75 in der Gegenüberstellung der Topologien zu beantworten.¹⁾

Eine Bemerkung zum Begriff Häufungspunkt einer Folge sollte unbedingt in das Schülerbuch aufgenommen werden. Denn allein durch die Ähnlichkeit des Wortlauts der Bezeichnungen "Häufungspunkt einer Folge / Häufungspunkt einer Menge"

1) Der Schüler könnte in diesem Zusammenhang die anschaulichen Bezeichnungsweisen Alexandroffs kennenlernen. Siehe: Alexandroff, P.S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. Berlin 1967, S. 187

ist zu befruchten, daß die Schüler die beiden Begriffe vermischen. Im Kursablauf selbst kann der Begriff schon an früherer Stelle zur Sprache kommen als im Buch. Dies wird sich aus der Unterrichtssituation ergeben.

Wie auf S. 343 hingewiesen, geht andererseits vom Gleichklang der Bezeichnungsweisen motivierende Wirkung aus. Dies könnte unter Umständen bereits zur Hinführung auf Definition 27 verwendet werden. Das entsprechende methodische Modell würde in Stichworten lauten: (1) Beschäftigung mit Folgen aus $\mathbb{R}$, die Häufungspunkte besitzen; (2) Wiederholung der Definition des Häufungspunktes einer Folge in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$; (3) Untersuchung der Beziehung Häufungspunkt einer Folge zur Wertemenge einer Folge an ausgewählten Beispielen; (4) an geeigneten Beispielen erweisen sich letztere als Häufungspunkte der Wertemenge; (5) Formulierung eines Kriteriums für Häufungspunkte der Wertemenge mit Hilfe des Umgebungsbegriffs in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$; (6) Definition des Häufungspunktes einer Menge in allgemeinen topologischen Räumen.

Damit obige Schritte zur Definition 27 hinführen, ist folgendes zu beachten:

Für (3) und (4) ist es nötig, sich auf Folgen zu beschränken, die einen oder mehrere Häufungspunkte haben und deren Häufungspunkte keine Folgenglieder sind. Für solche Folgen in $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ kann dann das mit der Definition 27 übereinstimmende Kriterium (siehe (5)) ohne Schwierigkeit erkannt werden. Beschränkt man sich für (3) und (4) nicht auf solche Folgen, dann ist dies ein Hindernis auf dem Weg zur Definition 27 und zwar nicht nur aus

psychologischen Gründen¹⁾, sondern aus mathematischen Gründen, da die Aussage "in jeder Umgebung von x liegt mindestens ein von x verschiedener Punkt von A " nicht wahr ist wenn für x z.B. ein Häufungspunkt einer alternierenden Folge und für A deren Wertemenge eingesetzt wird.

Die geschilderten Schwierigkeiten und das Argument, daß der im Kurs gewählte Weg zeitsparender zur Definition 27 führt, bewogen mich, mich gegen das oben geschilderte Vorgehen zu entscheiden. So oder so muß der Lehrer, der den Kurs durchführt, sich jedoch bei seiner Unterrichtsvorbereitung mit allen Vorstellungen auseinandersetzen, die der Schüler über Häufungspunkte einer Folge mitbringt. Es ist nämlich damit zu rechnen, daß die Schüler Aussagen über Häufungspunkte, die sie aus $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ kennen, ohne Bedenken für in allgemeinen topologischen Räumen auch gültig halten. Hierüber sollte sich der Lehrer nochmals eingehend in der Fachliteratur informieren. Es kann z.B. vorkommen, daß die Schüler in $\mathbb{R}$ die Aussage kennengelernt haben:

(*) Zu jedem Häufungspunkt einer Folge gibt es eine Teilfolge der Folge, die den Häufungspunkt als Grenzwert hat.

Da für bestimmte Beispiele aus $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ die Häufungspunkte der Folge gleichzeitig Häufungspunkte der Wertemenge der Folge sind, wird der Schüler rasch die zu (*) analoge Aus-

1) das wäre z.B. der Fall, wenn der Schüler wie auf S. 346 geschildert, das Nahe-bei-Liegen an Häufungspunkten, die zur Menge gehören, nicht erkennt.

sage für Häufungspunkte von Mengen formulieren: Zu jedem Häufungspunkt x einer Menge A gibt es eine Folge von Punkten aus A , die gegen x konvergiert. Bedächtigere Schüler sehen eventuell nach, ob die Aussage in $(\mathbb{I}, \mathbb{I}_\pi)$ ebenfalls gilt nachdem sie in $(\mathbb{R}, \mathbb{I}_\mathbb{R})$ gilt. Es ist aber zu befürchten, daß ein Großteil der Schüler die Aussage für in allen topologischen Räumen gültig hält, was bekanntlich nicht der Fall ist. Die didaktische Schwierigkeit dieses Themas liegt nun darin, daß es keine für den Schüler leicht zugänglichen Beispiele gibt, die schnell vor Augen führen würden, daß die oben geschilderte Verallgemeinerung unzulässig ist. Somit muß der Schüler sich mit der Auskunft des Lehrers zufrieden geben, daß es topologische Räume gibt, in denen (*) nicht gilt.

Da nicht alle Schüler den Begriff "Teilfolge" in ihrem Analysisunterricht kennengelernt haben, klammere ich im Schülerbuch das obige Thema ganz aus. Das soll jedoch nicht heißen, daß das Thema im Kurs überhaupt nicht angeschnitten werden soll. Ich möchte jedoch eine Problematik, die so viel individuelle Anpassung an den Stand der Lernenden erfordert, nicht in die knappe und starre Form einer Passage im Schülerbuch pressen. Der ambitionierte Lehrer, der entschieden hat, daß er seiner Klasse die mit (*) zusammenhängenden Überlegungen nicht vorenthalten will, findet etwa in Kelley S. 77 ein Beispiel.

In Aufgabe 76 spricht der Schüler zum erstenmal bewußt von der Menge der Häufungspunkte einer Menge. Vertrautheit mit diesem Begriff ist für die folgende Passage über die abgeschlossene Hülle unbedingt erforderlich. Gleichzeitig ist das Nachdenken über die in der Fachliteratur "Ableitung der Menge A " genannte Menge der Häufungspunkte von A

deshalb wichtig, da sie viel über die Struktur des jeweiligen topologischen Raumes aussagt. Im Unterricht sollten zunächst ohne Zuhilfenahme des Aufgabentextes (S.151) die verschiedenen Fälle der Relation zu A gesammelt werden, die für A^* (so kürzen wir hier zum internen Gebrauch die Ableitung von A ab) vorkommen können.

Die folgenden 10 Seiten des Schülerbuches sind der Hüllbildung von Mengen gewidmet. Zunächst wird - eingedenk der Wichtigkeit des Satzes 13 - mit viel Bedacht hingeführt. An anschaulichen Beispielen soll der Schüler zunächst dazu kommen, die Aussage des Satzes 13 zu vermuten. Die Vermutung kontrolliert er danach an einem endlichen Beispiel. Nachdem sich auch für dieses die Vermutung bestätigt, formuliert man den Satz 13 und macht sich an seinen Beweis. Den Fachmathematiker mag stören, daß der Beweis des Satzes 13 nicht bereits nach den Beispielen aus $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{A}, \tau_{\mathbb{A}})$ angegangen wird, ist doch die Kontrolle der Vermutung im topologischen Raum von S. 151 unten einigermaßen arbeitsreich und zudem der Satz 13 dem den Kurs durchführenden Lehrer doch als gültig wohlbekannt. Da es wie aus dem Schülerbuch zu ersehen recht langwierig ist, den Satz 13 zu beweisen, soll die sorgfältige Induktion auf die Behauptung (Satz 13) hier ein Gegengewicht bilden. Bei der Beschäftigung mit den Beispielen werden außerdem Erfahrungen gesammelt bzw. Material bereitgestellt, die auch im Zusammenhang mit den Sätzen 14 bis 18 nützlich sind, welche auf dem Weg zum Beweis des Satzes 13 erarbeitet werden müssen. Zudem halte ich das Vorgehen: (1) Auffinden einer Vermutung; (2) Suche nach Beispielen, die die Vermutung bestätigen wie gleichzeitige Aufmerksamkeit für Gegenbeispiele; (3) Erhärtung der Vermutung an Beispielen; (4) Formulierung

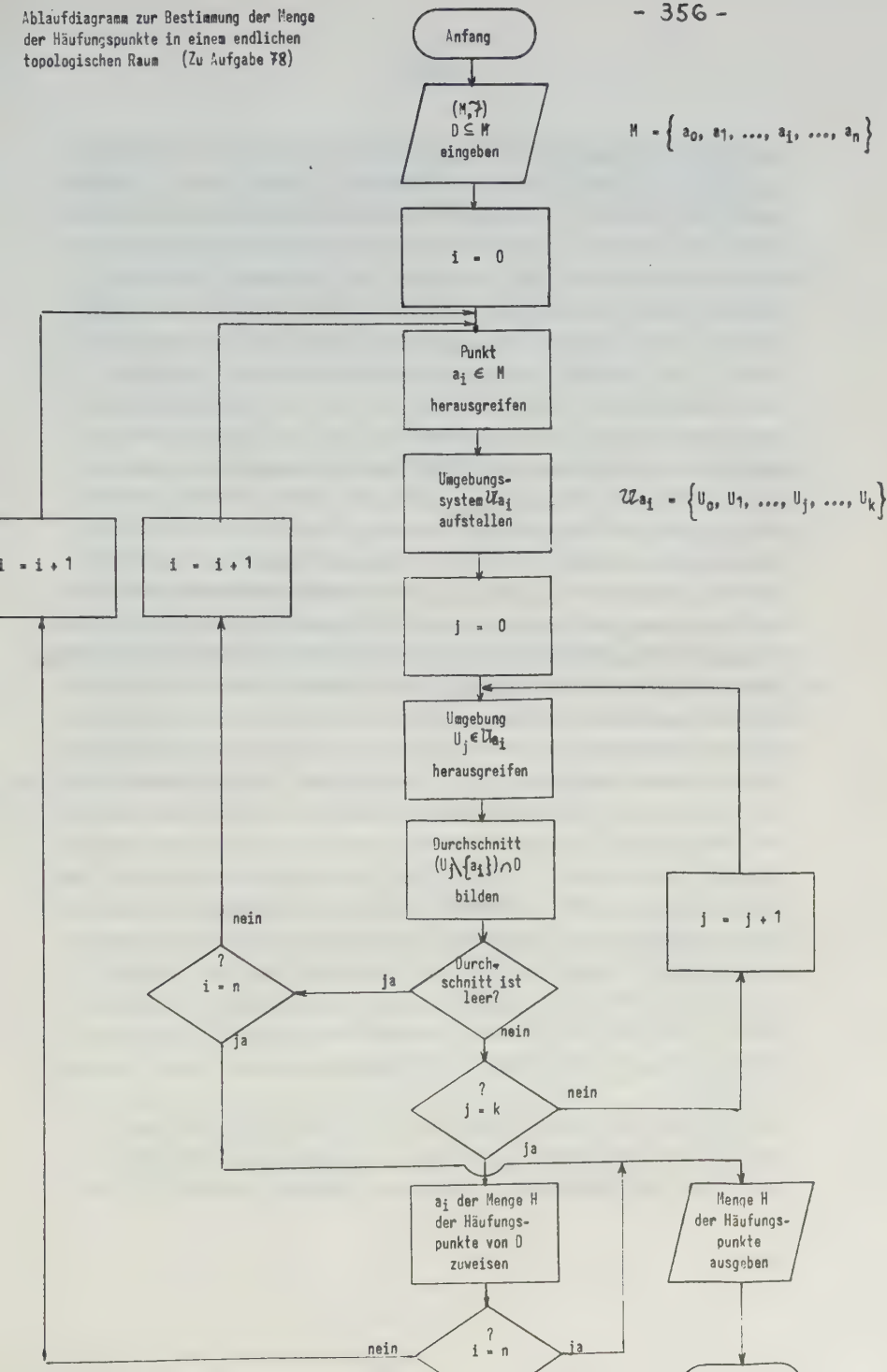
der Behauptung; (5) Beweis der Behauptung für pädagogisch auch gewinnbringend hinsichtlich allgemeiner Fähigkeiten, die der Schüler erreichen sollte. Die Bücher von Polya¹⁾ zu diesem Thema bestärken mich hierin. Im Leben eines mündigen Bürgers wie speziell im Bereich der wissenschaftlichen Betätigung jeder Art sind für das Aufstellen von Aussagen die oben geschilderten Stufen zu durchlaufen. In den Präambeln der meisten Mathematik-Lehrpläne wird immer wieder auf die bildende (allgemeinbildende) Kraft des Mathematikunterrichts hingewiesen. Die pädagogische Wirkung des Trainings obiger Denk- und Arbeitsweise ist die Begründung dafür.

Anläßlich der Fertigstellung der Tabelle auf S. 152 oben ergibt es sich, daß die Schritte, die in einem endlichen topologischen Raum nötig sind um die Häufungspunkte zu gegebenen Teilmengen zu finden, in einem Ablaufdiagramm dargestellt werden können. Ein Lösungsmuster findet sich auf der folgenden Seite. Die didaktischen Anmerkungen zu dieser Aufgabe 78 sind dieselben wie zu Aufgabe 53 (S.131) siehe Lehrerbuch S. 326 ff. Durch die Bearbeitung der Aufgabe 78 wird vor allem die Definition 27 nochmals unterrichtlich vertieft, wodurch sie den Schülern stärker vertraut wird, was sich günstig im folgenden Verlauf des Kurses auswirkt.

1) Georg Pólya: Mathematik und plausibles Schließen, 2-bändig, Basel 1962

Ablaufdiagramm zur Bestimmung der Menge
der Häufungspunkte in einem endlichen
topologischen Raum (Zu Aufgabe 78)

- 356 -



Für die Vereinigung der Menge A mit der Menge ihrer Häufungspunkte führe ich die Abkürzung $\tilde{A}$ ein. Satz 13 besteht dann kurz aus der Aussage: $\tilde{A} = \bar{A}$. Die Abkürzung $\bar{A}$ ist auf Seite 84 für die kleinste abgeschlossene Obermenge von A eingeführt worden. Es erscheint der größeren Klarheit willen nötig, die zum Beweis der Aussage $\tilde{A} = \bar{A}$ erforderlichen zu beweisenden Teilaussagen aufzufinden (Seite 153 Mitte). Im Dialog mit der ganzen Klasse wird versucht, ob die Beweise für (1), (2), (3) unmittelbar angegeben oder skizziert werden können. Nur für (1) ist dies möglich. Für (2) und (3) wird von den Schülern angegeben, welche Beweisschritte wohl nötig sind und welche verschiedenen Wege sich auf den ersten Blick als Beweisideen eröffnen würden. Das Training zu einem vernünftigen Dialog über solche Fragen ist eine nicht zu unterschätzende Berufsvorbereitung und hat also nicht zu unterschätzenden didaktischen Wert. Für den Lehrer erfordert dieses Einüben einer wünschenswerten Verhaltensweise seiner Schüler viel Geduld und pädagogisches Können, im Hinblick auf die Stellung der Sekundarstufe II auch aufgrund der Kollegstufen-Idee zwischen Schule und Beruf bzw. Schule und Studium lohnt sich jedoch die Mühe. Es hängt vom vorhandenen Zeit-Spielraum ab, ob der Lehrer die Klasse in kleine Teams einteilt die unabhängig voneinander verschiedene Beweiswege probieren. Dabei eingeschlagene "Irrwege" wirken sich dann pädagogisch sogar positiv aus, wenn sie als solche erkannt werden. Bleibt nicht genügend Zeit für dieses Erkennen (wozu oft der Lehrer auch helfend eingreifen muß) dann sollte die ganze Idee von den "Teams" verworfen werden, denn halbherzig ausgeführt erwarte ich sogar negative Auswirkungen.

Der Lehrer muß sehr darauf achten, daß durch die von ihm geforderte Selbsttätigkeit beim Beweisen - führt sie zu mehreren Fehlschlägen - sich der Schüler entmutigt fühlt.

Da Schüler sehr verschieden sind, der eine ist bereits nach einem Fehlschlag entmutigt, der andere erst nach vielen Fehlschlägen, ist das Vorbeugen für den Lehrer besonders in der Oberstufe eine höchst schwierige Aufgabe. Andererseits kann diesen Schwierigkeiten nicht einfach aus dem Weg gegangen werden, da das Erhöhen der sogenannten "Mutschwelle" zu den pädagogischen Aufgaben des Mathematikunterrichts gehört.

Nun sollte der Schüler dafür genügend aufgeschlossen sein, ein wenig Lenkung für das Auffinden der Beweise zu akzeptieren. Er wird zu diesem Zweck zunächst darauf verwiesen, einige wichtige allgemeine Eigenschaften der Hüllenbildung, also der Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$ zu sammeln. Es ist nötig, daß der Schüler diesen Vorschlag für vernünftig hält. Es muß ihm von selbst einleuchtend erscheinen, daß, wenn er über die Hüllenbildung im allgemeinen mehr weiß, ihm möglicherweise von daher bessere Beweisideen kommen. Die Aufgabe 79 gibt Impulse solche Eigenschaften selbst zu finden. Zu der Sprechweise "Zuordnung $A \mapsto \tilde{A}$ " werden keine Überlegungen eingeschaltet ob es sich um eine Abbildung handelt oder nicht, den Schülern leuchtet dies aus der Definition unmittelbar ein.

Zu den auf S. 154-157 abgehandelten Sätzen ist zu sagen:

- (1) Bei der unterrichtlichen Behandlung sollte - wie schon an früherer Stelle für alle deduktiven Passagen empfohlen - größtmögliche Selbsttätigkeit der Schüler angestrebt werden.
- (2) Im Schülerbuch verspreche ich mir von der Verwendung der ausgeschriebenen Formen anstelle von " $\wedge$ " und " $\vee$ " eine bessere Lesbarkeit und damit Verständlichkeit, besonders für den im Selbststudium das Buch

Benützenden. In der Formulierung von Satz 17 verwende ich bewußt statt " $\Rightarrow$ " die ausgeschriebene Form "wenn ... dann ..."

- (3) Es erfolgt wohlüberlegt, daß Sätze wie Satz 13 und Satz 15, deren Beweis zunächst erst die Ableitung weiterer Hilfssätze oder Sätze nötig macht, trotzdem zuerst einmal formuliert und niedergeschrieben werden. Dann werden als nächstes besagte Hilfssätze bewiesen. Und erst danach geht man an den zurückgestellten Beweis des vorher bereits formulierten Satzes.

Aufgabe 80 steht bewußt nach Satz 14, da sich hier die Gelegenheit einer vorteilhaften Anwendung von Satz 14 bietet.

Es erweist sich als günstig, eine gemeinsame charakterisierende Eigenschaft für alle Punkte von B zu haben und nicht zwischen Punkten von B und Punkten, die Häufungspunkte von B sind, aber nicht zu B gehören, unterscheiden zu müssen. Im Grunde haben wir es hier mit der charakterisierenden Eigenschaft der Berührungspunkte von B zu tun, diese Bezeichnung soll aber nicht eingeführt werden.

Soll in den Sätzen die Teilmengenbeziehung zweier Mengen A, B bewiesen werden, so wird die äußere Form

"Sei $x \in A \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in B$ "

gewählt. Eigentlich würde dann noch der Passus fehlen:

"d.f. alle $x \in A$ sind auch Elemente von B". Im Schülerbuch wurde dieser Passus nicht in die schriftliche Form aufgenommen, da dieser Denkschritt dem Schüler selbst überlassen werden kann.

Außer einigen die Sätze verbindenden Worten, die auch dazu dienen, den Zusammenhang und die Aufeinanderfolge der Sätze deutlich zu machen, sind keine Einschübe zwischen die Sätze und zugehörigen Beweise gestellt. Alle Aufgaben außer Aufgabe 80 kommen erst nach der deduktiven Passage. An der gesamten Passage ist es eine wesentliche Aufgabe des Lehrers, daran zu arbeiten, daß der Schüler den Überblick nicht verliert, sondern das Ziel (Beweis des Satzes 13) vor Augen hat. Dies ist wichtig, da bei fehlendem Überblick die Motivation für die Beschäftigung mit den Beweisen schwindet. Gerade bei einer Unterrichtssequenz wie der vorliegenden, die vom Schüler Konzentration verlangt, d.h. anstrengend ist, ist die Motivation wichtig. Den Überblick zu behalten ist während der Unterrichtssequenz wichtig, es ist aber zudem didaktisch wirksam, sich am Ende der Sequenz in der Retrospektive nochmals klärend einen Überblick zu verschaffen. Aufgabe 85 gibt mit ihrer Anregung zu einer schematischen Darstellung der Beziehung der Sätze untereinander hierzu einen Anstoß.

In den Aufgaben 83 und 84 werden dann weitere Eigenschaften der Hüllenbildung gesammelt. Da bewiesen worden ist, daß $\bar{A} = \widetilde{A}$, kann man hierbei die Verwendung des intern eingeführten Zeichens " $\sim$ " wieder fallen lassen. Es fällt auf, daß nunmehr alle Eigenschaften der Hüllenbildung gesammelt sind, die zum sogenannten Kuratowskischen Axiomensystem gehören. Auf die Äquivalenz dieses Axiomensystems zum Axiomensystem (O1) - (O3) soll - wie schon für (A1) - (A3) gehandhabt und auf S. 267 begründet - nicht eingegangen werden. Allenfalls würde sich aus dieser Fragestellung wieder ein Thema für eine Facharbeit ergeben.

Aufgabe 86 ist aus Dieudonné ¹⁾ entnommen. Durch Ausprobieren kann der Schüler ermitteln, für welche zwei offenen Mengen die verschiedenen Mengenbildungen, die angegeben sind, zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Der Schüler wird bemerken, daß einzelne offene Intervalle allein das nicht leisten, was die Aufgabe fordert, jedoch die Vereinigung mehrerer offener Intervalle. Diese Aufgabe hat einen einigermaßen hohen Übungswert, da auch für schwächere Schüler Erfolgserlebnisse möglich sind, da durch zeichnerische Darstellung das Ergebnis kontrolliert werden kann. Die Aufgabe ist als leicht zu bezeichnen. Aufgabe 87 kann ebenfalls ohne weiteres vom Schüler ohne Hilfe bearbeitet werden. Die Lösung kann z.B. dadurch gefunden werden, daß man zwei Mengen A, B wählt, deren Durchschnitt leer ist. Beachtet man ferner, daß A mit der Hülle von B einen nicht-leeren Durchschnitt hat, so hat man eine Lösung der Aufgabe 87 gefunden.

Aufgabe 88 beschäftigt sich wieder mit der kofiniten Topologie auf $\mathbb{R}$, wie schon Aufgabe 18 (S. 77). Sie ist für den Schüler ohne Schwierigkeiten zu lösen, wenn er sich an die Definition von $\bar{A}$ als der kleinsten abgeschlossenen Obermenge von A hält. Die folgenden beiden Aufgaben dagegen demonstrieren, daß es manchmal günstiger sein kann $\tilde{A}$ zu bestimmen. Dabei stellt Aufgabe 89 eine bewußt sehr einfache Aufgabe dar. Sie soll auf Aufgabe 90 vorbereiten. Unter Zuhilfenahme von Beispiel 36 ist Aufgabe 90 im Nu gelöst.

1) Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. Braunschweig 1972, S. 50

Das Vertrautsein mit der Definition 29 ist eines der wichtigsten Teilthemen des Topologiekurses, da eines seiner Ziele ja die vertiefte Einsicht in die Struktur von $\mathbb{R}$ ist. Daß $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, wurde im Grunde genommen bereits bei der Einführung der reellen Zahlen in Klasse 9 erarbeitet. Zu Beginn des Analysisunterrichts in Klasse 11 wird diese Eigenschaft von $\mathbb{R}$ meist in irgendeiner Weise herausgestellt. Trotzdem (so mußte ich in Kurs II feststellen) geht diese wichtige Einsicht über $\mathbb{R}$ bei einigen Schülern nicht tief, so daß der Topologiekurs hier eine wichtige Aufgabe hat. Ich verspreche mir gerade daraus eine Vertiefung der Einsicht in diese Eigenschaft, daß der Schüler sie auch in anderen topologischen Räumen kennenlernt als in $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ und daß er auch unendliche Teilmengen von $\mathbb{R}$ betrachtet, die in $\mathbb{R}$ nicht dicht liegen. Nach einer Erklärung dafür suchend, weshalb einige Schüler im früheren Analysisunterricht die Einsicht über das Dichtliegen von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ nicht verinnerlicht haben, vermute ich, daß der Grund darin liegen kann, daß diese Erkenntnisse mit dem Unendlichen zu tun haben. Hier scheinen Schüler, die als Lerntypen stark dem Anschaulichen verhaftet sind, Schwierigkeiten zu haben. Ob eine weit frühere Gewöhnung an den Umgang mit dem Unendlichen durch offene und nicht nur wie bisher in Grundschule und Sekundarstufe I versteckte Konfrontation hier Abhilfe schaffen könnte, kann ohne Erprobung nicht beantwortet werden. Die Konfrontation müßte meines Erachtens jedoch auf andere Art vorgenommen werden als es Papy mit seinem Leseheft für die 2. oder 3. Klasse: Spiele mit Hüten¹⁾ tut.

1) Spiele mit Hüten, für das 2. oder 3. Schuljahr. Aus dem Französischen übersetzt. Originalausgabe: Le jeu de chapeaux ou les surprises de l'infini par Frédérique et Papy. Stuttgart 1972

Der Begriff "nirgends dicht" soll nicht mehr für alle Schüler behandelt werden. Damit könnte sich jedoch eine Facharbeit eines einzelnen Schülers beschäftigen. Hauptanliegen der Facharbeit ist dann das Sammeln von Beispielen, insbesondere auch die Untersuchung der trivialen Topologien auf nirgends dichte Mengen hin. Als Bezugsliteratur ist z.B. Lipschutz¹⁾ zu nennen, dort speziell S. 70.

1) Lipschutz, S. : Theory and problems of general topology.
New York 1965

3.4.2 Zu: 2.4.2 Inneres, Äußeres, Rand einer Menge

Der nun folgende Abschnitt 2.4.2, der die Begriffe Inneres, Äußeres und Rand einer Menge bringt, kann aus Zeitgründen auch Übersprungen werden und die Begriffe nur jeweils propädeutisch behandelt werden. Da 2.4.2 eine Brücke zwischen abstrakter Theorie und Anschauung darstellt, lohnt es sich jedoch Zeit darauf zu verwenden. Methodisch kann man so vorgehen, daß zunächst in der euklidischen Ebene aufgezeigt wird, daß die abgeschlossene Hülle einer offenen Kreisscheibe gerade die Vereinigung der offenen Kreisscheibe mit der Menge ihrer Randpunkte ist. Es erweist sich nun, daß ein solches Vorgehen zunächst lediglich im dreidimensionalen euklidischen Raum und seinen Unterräumen möglich ist, da uns der Begriff Rand in anderen topologischen Räumen noch fehlt, wo er nicht mehr anschaulich fundiert ist. Da jedoch die Hüllenbildung auch in diesen allgemeinen topologischen Räumen erklärt ist, kann man nun umgekehrt den Rand einer Menge als die Differenzmenge der Hülle einer offenen Menge ohne die offene Menge selbst festlegen. Diese Definition des Randes ist zunächst nur für offene Mengen ausgesprochen. Mit dem Ziel der Verallgemeinerung betrachtet man das Beispiel offene Kreisscheibe nochmals von einer anderen Seite. Dann erkennt man, daß die Hülle der Kreisscheibe und die Hülle des Komplements der Kreisscheibe gerade die Randpunkte der Kreisscheibe gemeinsam haben. Ähnlich ist es bei Teilmengen des topologischen Raumes $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. Als Rand eines Intervalls wird man die Endpunkte des Intervalls I ansehen. Die Mengen dieser beiden Punkte kann man als Durchschnitt aus der Hülle von I und der Hülle des Komplements von I erhalten. Die an den Beispielen gewonnene Aussage über den Rand einer Menge wird als allgemeine Definition dienen. Sie ist auch auf nicht-offene Mengen anwendbar. Im Anschluß ist

in Aufgabe 93 die Definition 30 angewendet und mit dem Rand verglichen, den man anschaulich ermitteln würde. Während a), b), c) und d) der Aufgabe auch anschaulich gelöst werden könnten, ist dies für die Mengen in den Teilaufgaben e), f), g), h) nicht mehr möglich. Eine weitere Anwendung der Definition 30 verlangt Aufgabe 94 in einem endlichen topologischen Raum.

Aus den Ergebnissen der Aufgaben kommt man zu der Vermutung, daß der Rand einer Menge stets eine abgeschlossene Menge ist. Dies wird in Satz 19 formuliert und bewiesen. Auch der Inhalt des Satzes 20 ist an den Beispielen rasch einzusehen. Der Beweis bietet keine Schwierigkeiten, da außer der Definition des Randes nur eine Eigenschaft der Komplementärmengenbildung herangezogen wird. Die anschließenden Aufgaben 95 und 96 stellen in den beiden trivialen Topologien die Frage nach dem Rand einer Menge. Dabei und auch schon in den früheren Aufgaben wird ersichtlich, daß der Rand einer Menge auch leer sein kann. Außerdem fällt auf, daß der Rand einer Menge auch Punkte mit der Menge gemeinsam haben kann. Dies hatte man schon in Erfahrung gebracht als man in diesem Zusammenhang nicht-offene und nicht-abgeschlossene Mengen behandelte.

Eine Sammlung von solchen Mengen aus $\mathbb{I}$ wird in der Aufgabe 97 vorgelegt, um die Ränder zu bestimmen. Zur zeichnerischen Vorgabe der Mengen bedient man sich wieder der Rot-Grün-Übereinkunft. Die Aufgabe hat Bedeutung als Überleitung zur Definition des Inneren einer Menge. Dazu wird zusätzlich auf S. 166 noch ein Beispiel ausführlich dargestellt.

Das Beispiel ist so gewählt, daß ein Teil des Randes zur Menge gehört, ein anderer Teil nicht. Es wird dem Schüler

daher vernünftig erscheinen, die Menge der Punkte einer Menge hervorzuheben, die nicht Randpunkte sind. Für diese Menge wird eine neue Bezeichnung eingeführt. Sie heißt das Innere der vorgegebenen Menge.

Aufgaben 98 und 99 wenden die Definition 31 an und helfen, Erfahrungen über die allgemeinen Eigenschaften des Inneren einer Menge zu sammeln. Eine solche wird im Anschluß bewiesen: "Das Innere einer Menge ist stets offen". In $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ deckt sich diese Aussage mit unserer Anschauung. Die Beweisbedürftigkeit der Aussage leuchtet dem Schüler für allgemeine topologische Räume ein. Den Beweis kann das Gros der Schüler wohl nicht ohne Hilfe leisten. Deshalb nehme ich auch diese Passage mit ihren Sätzen und Beweisen ins Schülerbuch auf, auch wenn die Analogie der Vorgehensweise bei den Sätzen 21 bis 24 mit der Vorgehensweise bei den Sätzen 13 bis 18 die Aufgabe für den Schüler sehr erleichtert. Der Lehrer kann von Fall zu Fall entscheiden, ob er die Beweise den Schülern selbst überläßt.

Die Kombination (Verknüpfung) der Hüllenbildung, Komplementmengenbildung und Bildung des Inneren oder des Randes untereinander führt in den anschaulichen topologischen Räumen $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ zu interessanten Aussagen. Dadurch ist der Schüler motiviert, in allgemeinen Räumen zu untersuchen, ob dieselben Aussagen allgemeingültig sind. Aufgabe 100 beschäftigt sich mit dieser Fragestellung. Für d) und f) kann der Schüler Gegenbeispiele finden. Bei den übrigen Teilaufgaben erweisen sich die Aussagen als allgemeingültig, wobei der Schüler durch die zugehörigen Beweise nicht überfordert ist.

Für diese wie andere Aufgaben ist es eventuell eine Hilfe

für den Schüler, wenn er eine schematische Darstellung der Beziehung Menge A, rdA , Inneres von A, Hülle von A zur Verfügung hat. Auf durchsichtige Folie gezeichnet und mit Hilfe des Overhead-Projektors gezeigt, hat der Lehrer hier für den Schüler eine demonstrative Denksstütze parat. Die gezeichneten Felder sollen als Venn-Diagramme aufgefaßt werden.

Teil mengenbeziehung

$$B \subseteq \bar{B} \subseteq M$$



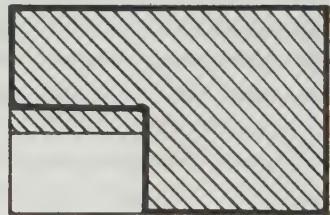
stark umrandet: B



schraffiert: $\bar{B}$

Teil mengenbeziehung

$$B' \subseteq \bar{B'} \subseteq M$$

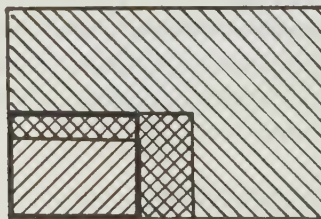


stark umrandet: $B' = M \setminus B$



schraffiert: $\bar{B'}$

Zum Zweck der größeren Übersichtlichkeit wurden für obige Mengenbeziehungen zwei Diagramme gezeichnet. Nun werden diese übereinandergelegt



:Inneres von B

stark umrandet: B



:Rand von B

Das Schema stellt den allgemeinen Fall dar, nämlich $B \cap \text{rd}B \neq \emptyset$ und ebenso $B' \cap \text{rd}B \neq \emptyset$. Außerdem macht das Schema die aus den Definitionen 30 und 31 selbstverständlich folgenden Aussagen deutlich:

$$\text{rd}B \subseteq \bar{B}; \quad \text{rd}B \subseteq \bar{B'}; \quad \underline{B} \subseteq B \subseteq \bar{B}$$

In Aufgabe 101 ist der Schüler nun nicht mehr überfordert, selbständig allgemeine Aussagen über Rand und Inneres im topologischen Raum $(\mathbb{R}, \tau)$ zu machen, da er sich an die bereits früher bearbeitete Aufgabe 88 (S. 159) halten kann. Den Schüler nimmt es im Anschluß an die bisher behandelten Themen nun nicht Wunder, daß sich auch für das Äußere einer Menge eine von der Anschauung unabhängige Definition angeben läßt, welche für alle topologischen Räume ausgesprochen wird. Alle zurückliegenden Aufgaben könnten nun nochmals auf diesen Begriff hin abgewandelt werden. Das Schülerbuch faßt sich kurz und überläßt es dem Leser (d.h. Schüler) selbst oder dem Lehrer, weitere Aufgaben zu finden. Die Ergänzung der Tabelle von S. 163 ist eine solche. Es geht nun noch um eine Zusammenschau aller 3 Begriffe. Aus $(\mathbb{I}, \tau_{\mathbb{I}})$ hat der Schüler die anschaulich gewonnene Erfahrung, daß Inneres, Rand und Äußeres einer Menge A paarweise disjunkt sind. Für Mengen in allgemeinen topologischen Räumen kann dies aus den Definitionen gefolgert werden.

Die Bedeutung des Abschnitts 2.4.2 liegt rückblickend vor allem darin, daß die Begriffe Inneres, Rand und Äußeres nun ohne Zuhilfenahme der Anschauung definiert werden. Für den Schüler ist die Erkenntnis von Bedeutung, daß diese drei Begriffe auch nach ihrer Verallgemeinerung manche der aus der Anschauung gewohnten Eigenschaften beibehalten.

Danach gefragt, welche praktische Bedeutung die abstrakte Definition des Randes einer Menge wohl haben könne, wiesen die Schüler selbst daraufhin, daß bei Extremwertproblemen der Infinitesimalrechnung ein Maximum bzw. Minimum auch auf dem Rand liegen könne. Ich war erstaunt darüber, daß sich die Schüler vorstellen konnten, daß man auch in allgemeineren Räumen aus diesem Grund an der Definition des Randes einer Menge interessiert sein könnte. Die Schüler des Kurses I schlugen vor, daß als Definitionsmenge einer Funktion eine Teilmenge eines n -dimensionalen Raumes gewählt sei und man dann nach Maxima bzw. Minima der Funktion fragen wolle. Es war den Schülern dann sehr selbstverständlich, daß der Rand der Definitionsmenge von besonderem Interesse sein würde. Somit waren sich die Schüler des Kurses I in dieser Hinsicht der Bedeutung der allgemeinen Definition des Randes einer Menge bewußt.

3.5 Zu: 2.5 Abbildungen topologischer Räume

Das Kapitel 2.5 stellt den Stetigkeitsbegriff in den Mittelpunkt. Dieser wird als besondere Eigenschaft von Abbildungen eines topologischen Raumes in einen topologischen Raum eingeführt. Die Beziehung von Konvergenz und Stetigkeit wird erst am Ende des Kapitels 2.5 diskutiert.

Dies steht im Gegensatz zu der vom Analysisunterricht oft gepflegten Vorgehensweise, die Stetigkeit mit Hilfe der Konvergenz von Folgen zu definieren. Es wird sich in 2.5.5 zeigen, daß dies zwar für Abbildungen von $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ nach $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ möglich ist, aber nicht für Abbildungen allgemeiner topologischer Räume. Es kann gezeigt werden, daß konvergenzserhaltende Abbildungen nicht in jedem Fall stetig sein müssen.

Ein Ausweg wäre, im Kapitel 2.3 (über Konvergenz) den Filterbegriff einzuführen. Dieser erschien mir jedoch für Schüler zu abstrakt.¹⁾ Mit Hilfe der verallgemeinerten Konvergenzdefinition über die Filter wäre es dann allerdings auch für Abbildungen allgemeiner topologischer Räume möglich, die Stetigkeit zu definieren. Ein anderer, zwar wenig begangener, aber immerhin auch vorgeschlagener Weg²⁾ des Analysisunterrichts ist es, zunächst die Stetigkeit

-
- 1) Den Autoren mit gegenteiliger Meinung halte ich entgegen, daß die Behandlung des Filterbegriffs, will man seine Abstraktheit durch Gewöhnung auffangen, sehr viel Unterrichtszeit und viel methodische Sorgfalt erfordert. Man wird Mühe haben, das Interesse für diese Untersuchungsobjekte bei den Schülern über so lange Zeit wach zu halten.
 - 2) vgl. Pickert, Günter: Einführung in die Differential- und Integralrechnung, Stuttgart 1969 sowie vgl. Sielaff, Klaus: "Zur Motivation der Stetigkeit" in: Bericht über die 4. Tagung der Fachleiter für Mathematik der Studienseminare der Bundesrepublik und Westberlins, Kassel 1970, S. 90-102

von Abbildungen zu definieren (mit Hilfe des Umgebungsbegriffs) und die Konvergenz einer Folge f als stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung f anzusehen. Stetige Fortsetzung von Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (mit $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) sind dem Schüler einleuchtend.¹⁾ Der Analysisunterricht der Schule verwendet oft die Bezeichnung "hebbare Unstetigkeitsstelle" für Definitionslücken einer Funktion, die sich stetig fortsetzen läßt. Die Verallgemeinerung auf Abbildungen beliebiger topologischer Räume hat jedoch nicht mehr die anschauliche Stütze am Funktionsgraphen und erfordert deshalb wieder besondere Sorgfalt. Während einer Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ meist mit einem Blick auf ihren Graphen anzusehen ist, ob sie stetige Fortsetzung der Funktion von $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ nach $\mathbb{R}$ ist, erfordert dieselbe Frage in anderen topologischen Räumen eine ausführliche Untersuchung mit Hilfe der Stetigkeitsdefinition.

Wegen der geschilderten Bedenken werden im vorliegenden Kurs Konvergenz und Stetigkeit so definiert, daß sie voneinander unabhängig sind. Es wird die "globale" Stetigkeit einer Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen mit Hilfe der offenen Mengen festgesetzt. Damit taucht das Problem auf, die Definition der globalen Stetigkeit plausibel erscheinen zu lassen. Hier wähle ich den Weg vom Homöomorphismus zur Stetigkeit, also vom spezielleren zum allgemeineren Fall. Der Gedanke dazu kam mir, da ich zu Beginn des Kurses bei Aufgabe 12, in der alle Topologien zu einer vierelementigen Menge aufgestellt werden sollen, feststellte, daß von den Schülern ganz von selbst bemerkt wurde, daß es unter den gefundenen Topologien solche gab, die "ganz gleich aussehen", "die isomorph sind"²⁾. Da somit der Homöomorphis-

1) Siehe hierzu die didaktischen Überlegungen in:
Wäsche, H.: "Stetigkeit und Konvergenz" in: Der Mathematikunterricht, Jahrgang 18, Heft 3, Stuttgart 1972

2) Schüleraussprüche

mus für den Schüler ein naheliegender Begriff ist, kann an die Erfahrung mit diesen speziellen stetigen Abbildungen angeknüpft werden. Hebt man nun die Spezialisierung insofern auf, als man von den Abbildungen nicht mehr verlangt, sie seien bijektiv, so kann eine die Homöomorphismen umfassende Klasse von Abbildungen gefunden werden. Etwas verblüffend könnte es für Schüler sein, daß die Stetigkeitsdefinition etwas von den Urbildern offener Mengen der Zieltopologie verlangt und nicht von den Bildern der offenen Mengen der Topologie der Definitions-
menge (Abkürzung: Starttopologie). Dem vorzubeugen, wird methodisch so vorgegangen, daß dem Schüler die Unzulänglichkeit des Beachtens aller Bilder von offenen Mengen der Starttopologie durch entsprechende Übungsaufgaben demonstriert wird. Er sieht ein, diese Bilder ergeben nicht in jedem Fall eine Topologie. Näheres über die Vorarbeit zur Stetigkeitsdefinition sei später ausgeführt.

Zunächst möchte ich mich kurz mit der Vorgehensweise von Papy¹⁾ auseinandersetzen. Im Zuge der Behandlung der Funktionen kommt er mit 15-16jährigen auch auf die punktweise Stetigkeit zu sprechen und strebt die Definition mit Hilfe des Umgebungsbegriffs an. Dabei knüpft er - so mein Eindruck - an die beliebte Vorstellung von stetigen Funktionen in $\mathbb{R}$ als in einem Zug zu zeichnenden Kurven an. Diese Vorstellung überträgt er auf Abbildungen von $\mathbb{I}$ nach $\mathbb{I}$, indem er sich - real oder im Geiste - eines storchenschnabelartigen Gerätes²⁾ bedient. Er möchte sich also eine intuitive Vorstellung von Stetigkeit, die er beim Schüler voraussetzt, zur Hinführung auf die Stetigkeitsdefinition zunutze machen. Meiner Meinung nach

1) Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysis-Unterrichts. Göttingen 1970

2) Storchenschnabel ist ein Gerät, das technische Zeichner zum maßstabsgetreuen Vergrößern einer Zeichnung verwenden.

wird jedoch durch diese Hinführung letztlich auch nicht plausibel, weshalb es in der Stetigkeitsdefinition auf die Urbilder von Umgebungen des Bildpunktes ankommt.

Bevor die methodischen Details zu 2.5 besprochen werden, sei ein Überblick über den Aufbau des Kapitels gegeben. Die für das Weitere nötigen Kenntnisse über Abbildungen, deren Quelle (bei uns: Definitionsmenge) und Ziel (bei uns: Zielmenge) beliebige Mengen sind, soll der Schüler in 2.5.1 wiederholen. In 2.5.2 stellen wir Untersuchungen an, das Bild von Topologien der Definitionsmenge und das Urbild von Topologien der Zielmenge betreffend. Dieser Abschnitt leistet wichtige Vorarbeit für die Abschnitte 2.5.3 "Homöomorphismen" und 2.5.4 "Stetige Abbildungen". 2.5.4 bringt sowohl die Definition der globalen wie die der lokalen Stetigkeit und bettet so die "alte" Stetigkeitsdefinition des Analysisunterrichts in die neue Disziplin Topologie ein. Es wird auffallen, daß als einzige allgemeine Eigenschaft der stetigen Abbildungen diejenige genannt wird, die die Komposition betrifft. Auf die algebraischen Eigenschaften wie " $f + g$ und $f \cdot g$ stetig, wenn f und g stetig" wird nicht eingegangen. Dies hat zwei Gründe. Einmal geschah es aus Zeitmangel. Mein Ziel war es, den Stoffumfang realistisch der Länge des Schuljahres anzupassen. Dies veranlaßt zu Überlegungen, wo Kürzungen möglich sind. Für die Stetigkeitsaussagen über Funktionen in $\mathbb{R}$ hatte die Aussage eine wichtige praktische Bedeutung: man konnte mit ihrer Hilfe aus einem "Fundus" von wenigen Funktionen, deren Stetigkeit unmittelbar anhand der Definition gezeigt wurde, ein umfangreiches Reservoir von stetigen Funktionen bekommen. Diese praktische Bedeutung der Aussage entfällt nun für topologische Räume, die nicht wie $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$ gleichzeitig die algebraische Struktur eines Körpers aufweisen. Damit ist der zweite Grund für das Weglassen genannt.

3.5.1 Zu: 2.5.1 Der allgemeine Abbildungsbegriff

Zu Beginn des Kapitels 2.5 müssen die Kenntnisse über den allgemeinen Abbildungsbegriff (= Funktionsbegriff) aufgefrischt werden. Meine frühere Schulerfahrung geht dahin, daß es jeweils letztlich zeitsparender ist, eine kurze, gezielte¹⁾ Wiederholung vorzunehmen, bevor man auf einen Begriff aus dem früheren Mathematikunterricht zurückgreift, als wenn man diese Wiederholung unterläßt und im weiteren Verlauf mit Wissenslücken bei den Schülern kämpfen muß.

Nach einem einführenden Beispiel, das wie Aufgabe 44 auf S.119 dem Zweck dient, verschüttete Kenntnisse über die allgemeine Definition des Abbildungsbegriffs zu mobilisieren, (siehe auch Lehrerbuch S.317), wird dem Schüler diese noch explizit vorgelegt (Definition 33). Während die meisten Schulbuchwerke zur Infinitesimalrechnung Abbildung und Graph der Abbildung stillschweigend gleichsetzen (Probleme entstehen dadurch nicht, da dort die Eigenschaften injektiv, surjektiv meist gar nicht angesprochen werden und auch Überlegungen zur Gleichheit zweier Abbildungen übergangen werden), soll der Schüler hier mit der in der heutigen Mathematik gebräuchlichen Definition der Abbildung als Tripel aus Quelle, Ziel und Graph vertraut werden. Allerdings kommt die Bezeichnung Tripel nicht ausdrücklich in der Definition 33 vor, da sie den Schüler überfordern würde. Wie bereits in 3.3.1 besprochen, verwendet das Schülerbuch die Bezeichnungen Definitionsmenge,

1) "gezielt" soll bedeuten, auf den unmittelbar folgenden Gebrauch des Begriffs abgestimmt. Dies ist auch der Grund, warum die ausführliche Wiederholung des allgemeinen Abbildungsbegriffs erst hier und nicht bereits zu Beginn des Kapitels 2.3 vorgenommen wird. Ein Lehrer, der anderer Meinung ist, kann natürlich bei 2.3.1 auf 2.5.1 stärker zurückgreifen.

Zielmenge und Bildmenge. Bildmenge und Zielmenge sind auseinanderzuhalten. Während die Darstellung des Graphen einer Funktion in einem kartesischen Koordinatensystem den Schülern aus dem bisherigen Unterricht sehr geläufig ist, kann es vorkommen, daß dies vom Pfeildiagramm weniger gilt. Es sollte nicht vernachlässigt werden, daß seine Verwendung im Folgenden Vorteile bringt (siehe z.B. bei der Wiederholung der Begriffe injektiv, surjektiv usw.).

Die Aufgaben 104 und 105 sowie Beispiel 42 erfordern die Anwendung der Definition 33. Sie haben u.a. die Aufgabe, den Schüler auch an Abbildungen von einer endlichen Menge nach einer endlichen Menge zu gewöhnen, sofern dies nötig ist. Im Hinblick darauf, später bei der Besprechung der Stetigkeitsdefinition auch Kontrastbeispiele zur Verfügung zu haben, sind auch unstetige Funktionen unter den Beispielen.

Für die Besprechung von Stetigkeit und Homöomorphie ist es nötig, die Begriffe injektive, surjektive, bijektive Abbildung zur Verfügung zu haben. Hierüber sind die Vorkenntnisse der Schüler in der Regel bereits spärlicher als über den allgemeinen Abbildungsbegriff. Zur Wiederholung dienen Beispiel 43 und die Aufgaben 106 und 107. Definition 34 gibt die nötige Sicherheit zur Bearbeitung der Aufgaben. Es ist handlich, Definition 34 auch in die Sprache der Pfeildiagramme übersetzt zur Verfügung zu haben. Damit läßt sich für Abbildungen von einer endlichen Menge nach einer endlichen Menge mit einem Blick übersehen, welche besonderen Eigenschaften die Abbildungen haben. Für Abbildungen, deren Quelle und Ziel unendliche Mengen sind, dient hierzu auch die kartesische Darstellung des Graphen der Abbildung oder eventuell ein Nomogramm (sofern diese Darstellungsform den Schülern bekannt ist).

Für das allgemeine Verständnis ist es wichtig (hierauf zielen die Beispiele u.a.), daß der Schüler erkennt, daß es, um über die besonderen Eigenschaften einer Funktion sprechen zu können, nicht genügt, nur den Graph der Funktion zu betrachten, sondern es unbedingt nötig ist, die beiden weiteren Bestandteile des Funktionsbegriffs zu beachten (Definitions- und Zielmenge).

Als wichtige Anwendung bijektiver Abbildungen werden Untersuchungen über Gleichmächtigkeit ins Blickfeld gerückt. Dies ist zwar kein eigentliches Anliegen, das man zur Topologie zählen würde, ist aber als Vorarbeit für die Behandlung der Homöomorphismen gut geeignet. Außerdem kann man hier mit Sicherheit mit dem Interesse der Schüler rechnen. Die Teilnehmer meiner beiden Kurse waren ohne Ausnahme sehr von diesem Thema angesprochen. Die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{G}$ (Menge der geraden Zahlen) ist den Schülern bekannt und erscheint ihnen, trotzdem die beiden Mengen in echter Teilmengenbeziehung stehen, nicht paradox. Meist haben die Schüler auch bereits früher etwas vom Cantor'schen Diagonalverfahren gehört. Um hier nicht nur Bekanntes wieder zu sammeln, kann man als Aufgabe statt die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ zeigen zu lassen, die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}$ aufzeigen lassen. (Aufgabe 109, aber auch Beispiel 45). Beide Probleme sind freilich letztendlich identisch, (was der Schüler jedoch erst später feststellt) und der Nachweis geschieht nach dem gleichen Verfahren. Hat man die geordneten Paare von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in Matrixform aufgeschrieben, so könnte man zunächst zum Kontrast ein Abzählverfahren zu beginnen versuchen, das nicht zu dem gewünschten Ziel führt. Das Diagonalverfahren wird dann von den Schülern vorgeschlagen (Vorkenntnisse!)

Mir erschien es wichtig, in Aufgabe 108' vom Schüler selbst unendliche Mengen nennen zu lassen, um hierin die Breite seines Erfahrungsschatzes zu kennen. Auch erwartete ich, daß wohl unter anderem die Menge der reellen Zahlen genannt würde. Damit habe ich einen Ansatzpunkt gewonnen, um über das Kontinuum zu sprechen, also über unendliche Mächtigkeit, die nicht gleich der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ ist. Es sollte hier insgesamt nicht zu sehr auf Beweise eingegangen werden, allenfalls könnte man für Facharbeiten Themen abzweigen, die einzelne Schüler selbständig weiterverfolgen könnten. Man kann sich damit begnügen, nochmals einige für den Laien paradox erscheinende Gleichmächtigkeiten besonders hervorzuheben. Diese werden für die später angestellten topologischen Fragestellungen noch besondere Bedeutung erlangen. Da ist einmal die Gleichmächtigkeit des offenen Intervalls $(0;1)$ mit der Menge $\mathbb{R}$ (Beispiel 46). Zunächst ließ ich die Schüler sozusagen tippen, ob Gleichmächtigkeit bestünde oder nicht. Es war nur ein einziger Zweifler unter den Schülern. Alle anderen waren sich von vornherein intuitiv sicher, daß Gleichmächtigkeit bestünde. Allerdings fiel es allen Schülern schwer, eine bijektive Abbildung f zu finden, die das Einheitsintervall I nach $\mathbb{R}$ abbildet. Als Abbildungsvorschrift hätte man z.B. $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x - \frac{\pi}{2})$ wählen können. Ich zog es vor, eine geometrische Konstruktion der bijektiven Abbildung anzubieten. Dann war allen Schülern einsichtig, daß die Gleichmächtigkeit von I und $\mathbb{R}$ bewiesen ist. Das nächste Beispiel erschien allen Schülern weitaus paradoxer. Gerade solche höchst unerwarteten Ergebnisse, wie in Beispiel 47, sind im Mathematikunterricht reizvoll für den Schüler. Wir nahmen uns vor, das halboffene Intervall mit den Randpunkten $(0;1]$ mit dem Quadrat von der Seitenlänge 1 (genaue Beschreibung siehe Schülerbuch) hinsichtlich der Mächtigkeit zu untersuchen. Die Schüler tipp-

ten automatisch darauf, daß hier keine Gleichmächtigkeit vorliegen könne. Zwei verschieden-dimensionale Gebilde als Punktmengen betrachtet als gleichmächtig anzusehen, war doch für alle Schüler zu ungewöhnlich. Daraufhin konstruierten wir nun die sogenannte Peano-Abbildung φ . Die Vorarbeit dafür war allerdings nicht unerheblich, denn die Schüler sind nicht von vornherein an Brüche in Dualdarstellung gewöhnt, aber das Hauptziel war, zu erkennen, daß φ eine Abbildung ist und daß sie bijektiv ist. Im Schülerbuch wird lediglich eine Beweisskizze geliefert. Der Lehrer möge je nach Stand seiner Klasse die Feinheiten hinsichtlich eines exakten Beweises selbst ausbauen.

Bewußt wird als Aufgabe 110 gestellt, die Urbilder von Punkten aus Q bei der Abbildung φ zu ermitteln.¹⁾ Dabei wählte ich die Koordinaten allerdings in Bruchform, und zwar so, daß der Nenner bereits eine Zweierpotenz darstellt. Andernfalls ergeben sich doch zu große rechnerische Hürden. Die Aufgabe dient dazu, die Gedankengänge stützen zu helfen, die man zum Nachweis der Bijektivität von φ machen muß. Die Aufgabe 111 fordert die Ermittlung der Bildpunkte einer Punktfolge aus dem angegebenen Intervall. Der Grenzwert dieser Folge ist der Punkt 0, welcher nicht zu I gehört. Wie von selbst ergibt sich die Frage, ob die Folge der Bildpunkte auch konvergiert und ob der Grenzwert dieser Folge zu Q gehört.

1) Dies ist bereits eine nützliche und motivierende Vorarbeit für 2.5.2

3.5.2 Zu: 2.5.2 Bild einer Topologie, Urbild einer -----Topologie-----

Aufgabe 111 ergibt eine willkommene Überleitung zu einer neuen Bezeichnung: Bild einer Menge bei einer Abbildung f . Diese Bezeichnung und die zugehörigen Abkürzungen sind den Schülern größtenteils noch nicht bekannt. Sie müssen neu eingeführt werden. Für die spätere Stetigkeitsdefinition (Definition 42) und die sich daraus ergebenden Sätze ist es erforderlich, Aussagen über die Bilder von Teilmengen der Definitionsmenge einer Abbildung zur Hand zu haben, wie sie Satz 25, 26, 27 wiedergeben. Um ein genaues Auseinanderhalten des Bildes einer Menge und der Schreibweise für das Bild eines Punktes zu gewährleisten, wählte ich statt der runden Klammern (vgl. $f(x)$!) eckige Klammern. In Aufgabe 114 soll der Schüler Beispiele finden, die die vorher gefundenen Aussagen (Satz 25 bis 27) plausibel erscheinen lassen. Die ausführlichen Beweise der Aussagen über Durchschnitt und Vereinigung können aus Zeitmangel eventuell entfallen. Man kann sich möglicherweise damit begnügen, nur eine der drei Aussagen zu beweisen.

Die Sätze 25 bis 27 sind eine notwendige Vorarbeit für die Beschäftigung mit dem "Bild" einer Topologie. Geht man davon aus, daß die Schüler sich durch die vorangegangenen Überlegungen erst allmählich an den Begriff Bild einer Menge bei einer Abbildung gewöhnt haben, so erscheint es ratsam, zunächst behutsam weiterzugehen und nach den Bildern aller Teilmengen einer Menge zu fragen. Dies wird dem Schüler leichter fallen als der direkte Sprung zum "Bild" einer Teilmenge der Potenzmenge. Gleichzeitig wird eine weitere Kurzschreibweise für das "Bild" einer Teilmenge der Potenzmenge eingeführt. Der Schüler lernt die induzierte Abbildung zu einer Abbildung f kennen. Er muß streng unterscheiden können

zwischen der Abbildung der Definitionsmenge D in die Zielmenge Z an sich und der Abbildung, die dadurch definiert ist, daß jeder Teilmenge der Definitionsmenge ihr Bild zugeordnet sei. Letzteres ist eine Abbildung von $\mathcal{P}(D)$ nach $\mathcal{P}(Z)$, die wir die durch die ursprünglich gegebene Abbildung induzierte Abbildung nennen wollen. Hinsichtlich der induzierten Abbildung kann nach dem Bild der Potenzmenge des Definitionsbereiches gefragt werden (Abkürzung: $f\mathcal{P}(D)$). Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt nach dem Bild einer Teilmenge dieser Potenzmenge zu fragen, also nach dem Bild einer Topologie der gegebenen Definitionsmenge. Es wäre schön, zu erreichen, daß die Schüler diese Frage selbst stellen, nachdem sie sich mit dem Bild der Potenzmenge auseinandergesetzt haben. Daß diese Frage von den Schülern selbst kommt, ist nicht zu hoch gegriffen, da ja bereits die Potenzmenge selbst eine Topologie, wenn auch eine triviale, auf der gegebenen Menge darstellt. Nach meiner Erfahrung äußern die Schüler sehr rasch und ohne viel zu denken, daß das Bild einer Topologie wieder eine Topologie, diesmal der Zielmenge, sei. Durch Bearbeitung der Aufgabe 116 (S.190) werden sie eines besseren belehrt. Läßt man jeden Schüler diese Aufgabe für sich bearbeiten, so erhalten wir vielerlei verschiedene Lösungen und damit ein umfangreiches Reservoir an verschiedenen Abbildungen der gegebenen Definitionsmenge. Die Topologie der Definitionsmenge ist in Aufgabe 116 bereits vorgegeben, um zu verhindern, daß die Schüler selbst auf eine der beiden trivialen Topologien zurückgreifen. Nach diesem Sammeln von Erfahrungen an den selbstgewählten Beispielen kann aber immerhin der Satz formuliert werden, daß bei einer bijektiven Abbildung das Bild einer Topologie der Definitionsmenge, das bei der induzierten Abbildung entsteht, eine Topologie der Zielmenge ist. Diese Behauptung muß trotz der möglicherweise zahlreichen, die Aussage belegenden Beispiele bewiesen werden.

Es sollte von jedem Schüler mindestens verlangt werden, daß er angeben kann, was zur Durchführung des Beweises notwendig ist: nämlich die Anwendung der drei Axiome des topologischen Raumes auf das entstandene Bild der Topologie.

Da man im folgenden nicht nur Aussagen über Topologien auf endlichen Mengen machen möchte, ist es nützlich, sich über das Bild einer Basis einer Topologie bei einer Abbildung Gedanken zu machen. Erkenntnisse, die hierbei gewonnen werden, werden wir brauchen können, wenn wir Abbildungen der topologischen Räume $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ und $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ in sich oder Abbildungen von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ nach $(\mathbb{K}, \tau_{\mathbb{K}})$ oder umgekehrt betrachten. Der Schüler wird auf die Frage nach dem Bild der Basis anhand von Beispiel 49 hingeführt. Dabei beschäftigt sich der Schüler bereits genauer mit der Projektionsabbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Die Abbildung p des Beispiels 49 wird später öfter verwendet. Sie ist eine surjektive Abbildung. Das Bild der Basis $\mathcal{B} = \{K \subseteq \mathbb{K} \mid K \text{ ist offene Kreisscheibe}\}$ der Topologie $\tau_{\mathbb{K}}$ stellt eine Basis der Topologie $\tau_{\mathbb{R}}$ dar. Dies wird kurz gezeigt.

Im folgenden sollen noch einmal die Erfahrungen der Aufgabe 116 herangezogen werden, und zwar bei der Untersuchung, welche besonderen Eigenschaften der Abbildung dafür verantwortlich sind, daß das Bild der Topologie der Definitionsmenge eine Topologie der Zielmenge ist. Ist die Abbildung nicht surjektiv, so ist das Bild keine Topologie. Ein Beispiel für eine surjektive, aber nicht injektive Abbildung kann gefunden werden, wofür ebenfalls $f\tau$ keine Topologie der Zielmenge ist. Die Gründe dafür werden untersucht.

Bei dieser Erkenntnis stehen bleibend, könnte man versucht sein, nur Aussagen über die Abbildungen von Topologien bei bijektiven Abbildungen anzustreben. Will man dies nicht, so muß nach einem Ausweg gesucht werden. Diesen kann der Schüler wohl nicht selbst sehen, sondern er muß ihm angeboten werden. Dies geschieht, indem nach den Urbildern von Teilmengen der Zielmenge bei einer Abbildung gefragt wird. Dazu muß der Begriff Urbild einer Menge bei der Abbildung f zunächst geklärt werden. Damit hat der Schüler möglicherweise mehr Schwierigkeiten als beim Begriff Bild einer Menge, denn es kann Teilmengen der Zielmenge geben, deren Urbild leer ist. Hier zeigt sich nun der Vorteil, Pfeildiagramme als Mittel zur Darstellung von Abbildungen zur Verfügung zu haben. An diesen können nämlich jeweils sehr anschaulich die Menge der Urbilder einzelner Punkte und das Urbild einer Teilmenge der Zielmenge bei einer Abbildung erklärt werden. Dann bereitet dem Schüler die Definition (39) des Symbols $f^{-1}(y)$ inhaltlich keine Schwierigkeiten. Der Lehrer sollte allerdings vorbeugend beachten: Der Schüler ist von der Schreibweise $f(x)$ gewöhnt, daß diese genau einen Punkt bezeichnet, eben das Bild des Punktes x . $f^{-1}(y)$ dagegen beschreibt eine Menge. Dies ist bei der Ähnlichkeit der symbolischen Darstellung für den Schüler verwirrend. Der Lehrer könnte auf den Gedanken kommen, diesen Schwierigkeiten auszuweichen, indem er anstelle von $f^{-1}(y)$ ein anderes Symbol einführt. Dagegen spricht jedoch, daß die Schreibweise $f^{-1}(y)$ historisch gewachsen ist.

Die Beschäftigung mit $f^{-1}(y)$ ist methodisch eine Vorstufe zur Einführung der Schreibweise für das Urbild einer Menge bei einer Abbildung: $f^{-1}[Y]$ (Def.40). In jedem Fall sollten beide Schreibweisen an Beispielen (Beispiel 51) geübt werden. Die Beispiele sollten sich aber in jedem Fall nicht nur auf bijektive Abbildungen beschränken. Wieder ziehen wir das Beispiel der Projektionsabbildung $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heran. (Beispiel 52).

Das Ergebnis von Beispiel 52 werden wir in Abschnitt 2.5.4 noch benötigen. Am Beispiel einer allgemeinen Abbildung einer endlichen Menge nach einer endlichen Menge wird der Begriff Urbild nochmals geübt (Aufgabe 118). Die folgende Aufgabe 119 leistet für den späteren Abschnitt 2.5.4 Vorarbeit. Außerdem sollen das Beispiel 52 und die Aufgaben 118 und 119 Material liefern für die Kontrolle der folgenden Aussagen über die Urbilder von Vereinigungsmengen, Durchschnittsmengen und Differenzmengen von Teilmengen der Zielmenge einer Abbildung. Diese sind in Satz 29 zusammengestellt. Zur Anfertigung der Beweise könnte man die Klasse in einzelne Teams aufteilen, so daß nicht jeder Schüler jeden Beweis selbst anfertigen muß. Die Aussagen (a) bis (d) des Satzes 29 werden an späterer Stelle unbedingt gebraucht.

Man kann nun erwarten - wenn der Eindruck des Problems "Ist das Bild einer Topologie der Definitionsmenge eine Topologie der Zielmenge?" noch frisch ist - daß die Schüler von selbst die entsprechende Frage für das Urbild einer Topologie der Zielmenge bei der induzierten Abbildung stellen werden. Für Schüler, die diese Frage nicht von selbst stellen, übernimmt dies die Aufgabe 120. Auch kann diese Aufgabe eine Stütze sein, wenn es darum geht, den Beweis der Aussage " $f^{-1}\mathcal{O}$ ist eine Topologie der Definitionsmenge, wenn $\mathcal{O}$ eine Topologie der Zielmenge ist" zu geben. Die dann für die "Urbild"-Topologie zu untersuchenden Axiome (01) bis (03) finden sich wieder in den Forderungen (1) bis (4) der Aufgabe 120. Bei (3) tut man zur Vereinfachung der Untersuchungen so, als läge eine endliche Topologie vor.

Es stellt sich heraus, daß $f^{-1}\mathcal{O}$ eine Topologie der Definitionsmenge ist.¹⁾ Am Beispiel der Abbildung

1) Sie heiße im folgenden auch die durch f in der Definitionsmenge induzierte Topologie der Topologie $\mathcal{O}$ oder noch kürzer induzierte Topologie.

$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ erkennt man, daß das Urbild der Topologie der Zielmenge $p^{-1}\tau_{\mathbb{R}}$ nicht die übliche Topologie $\tau_{\mathbb{R}^2}$ von $\mathbb{R}^2$ ist. Die induzierte Topologie $p^{-1}\tau_{\mathbb{R}}$ ist eine Streifentopologie von $\mathbb{R}^2$ (für die Schüler eine alte Bekannte). Manche Schüler werden durch dieses Ergebnis stutzig, da sie erwartet hätten, daß $p^{-1}[p[K]] = K$, was bekanntlich nur für bijektive Abbildungen stets gilt. So sollte man hier auf die für Abbildungen allgemeingültigen Aussagen aufmerksam machen $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ und $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$. (Satz 30) Beweis und Angabe von Beispielen könnten Teilthema einer Facharbeit eines einzelnen Schülers sein.

Man kann wie obiges Beispiel zeigt, von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ und der Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ausgehend die Definitionsmenge $\mathbb{R}^2$, welche hier Obermenge der Zielmenge $\mathbb{R}$ ist, mit einer Topologie versehen, eben mit $p^{-1}\tau_{\mathbb{R}}$. Allerdings ist $p^{-1}\tau_{\mathbb{R}}$ nicht gleich $\tau_{\mathbb{R}^2}$. Es stellt sich nun die Frage, ob es durch die Wahl einer anderen Abbildung f mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}^2$, und die Wahl einer geeigneten Topologie σ möglich ist, mit Hilfe des obigen Vorgehens, $\mathbb{R}^2$ gerade mit der Topologie $\tau_{\mathbb{R}^2}$ zu versehen, d.h. zu erreichen, daß $f^{-1}\sigma = \tau_{\mathbb{R}^2}$. Dieses Problem wird von den Schülern wohl nicht von selbst angeschnitten werden. Die Inklusionsabbildungen wie die Projektionsabbildungen sind für den Schüler keine naheliegenden Beispiele für Abbildungen. Für den Abschnitt 2.5.3 "Homöomorphismen" und auch für 2.5.4 ist es hingegen unbedingt nützlich, diese speziellen Abbildungen für die Definitions- bzw. Zielmenge $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ zusammenzustellen und jeweils nach den induzierten Topologien der natürlichen Topologien bezüglich dieser Abbildungen zu fragen. So werden etwa unter Vorgabe der Inklusionsabbildungen $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ oder $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die induzierten Topologien $i^{-1}\tau_{\mathbb{R}^2}$ bzw. $i^{-1}\tau_{\mathbb{C}}$ ermittelt. Die Ausführungen hierzu sind im Schülerbuch im Hinblick auf das Selbststudium sehr ausführlich.

Gleichzeitig mit diesen Ergebnissen gewinnt man die Erkenntnis, daß mittels $i : S \longrightarrow \mathcal{T}$, wobei S die Menge der Punkte einer Strecke ist, auf S eine "natürliche" Topologie induziert werden kann. Über diese induzierten Topologien auf Strecken oder Kurvenstücke werden wir im Abschnitt 2.5.3 Homöomorphismen noch sprechen.

Der Fachmann fragt in diesem Zusammenhang vielleicht, weshalb im Kurs nicht auf den Begriff Spurtopologie eingegangen wird. Man hätte damit in jedem beliebigen topologischen Raum die Möglichkeit, die auf einer Teilmenge des Raumes induzierte Topologie herzustellen. Dies unterblieb im vorliegenden Lehrgang bewußt. Der erste Grund dafür ist die Begrenztheit der zur Verfügung stehenden Unterrichtszeit. Der zweite Grund ist, daß auf dem Begriff Spurtopologie im folgenden Unterrichtsablauf nicht weiter aufgebaut wird, was letztlich zum Teil auch wieder eine Folge der Zeitknappheit ist. Ich bin aber der Meinung, daß der Schüler auch ohne den Begriff Spurtopologie kennengelernt zu haben, einen den Didaktiker zufriedenstellenden Eindruck von der Topologie als einer Teildisziplin der Mathematik erhält.

3.5.3 Zu: 2.5.3 Homöomorphismen

Dieser Abschnitt hat bereits die homöomorphen Abbildungen zum Thema. Erst im darauffolgenden Abschnitt soll, wie zu Beginn dieses Kapitels ausgeführt, auf die Stetigkeit eingegangen werden. Diese Reihenfolge der Behandlung der beiden Themen spiegelt eine didaktische These wider, die nicht von allen Didaktikern¹⁾ anerkannt wird. Man geht dabei davon aus, daß der Spezialfall für den Schüler leichter zugänglich ist, als der allgemeinere Fall. Siehe hierzu auch die Ausführungen auf Seite 346.

Das methodische Konzept dieses Abschnitts stellt sich wie folgt dar:

Als wir ganz am Anfang des Kurses die Axiome des topologischen Raumes dadurch "einübten", daß in Aufgabe 13 (S.76) alle Topologien zu einer gegebenen dreielementigen Menge aufgestellt wurden, fiel bereits die Strukturgleichheit einiger der gefundenen Topologien auf. Einige Schüler des Kurses I, die teilweise aus der Booleschen Algebra das Wort Isomorphie bereits kannten, verwendeten diese Bezeichnung auch für die strukturgleichen Topologien. Alle Schüler stellten die Strukturgleichheit fest, wobei dies mit einem Blick zu machen war, da die fraglichen Topologien ja nur höchstens 8 verschiedene offene Mengen hatten. Auf die Frage, woran die Strukturgleichheit erkennbar sei, kam nach einigem Zögern die Antwort, die beiden Topologien hätten gleich viele Elemente. Daß dies zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für Isomorphie ist, wurde nachträglich von allen Schülern eingesehen, da ja Beispiele gleichmächtiger Topologien, die nicht isomorph sind, bei der Bearbeitung der Aufgabe 13 auch auftraten. Es fiel aber der Mehrzahl der Schüler nicht leicht

1) Gegenteiliger Meinung ist z.B. Dienes;
vgl. etwa Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Methodik der
modernen Mathematik. Freiburg 1970. S. 46 ff

eine kontrollierbare Bedingung für Isomorphie an den Beispielen herauszufinden. Z.B. kam der Vorschlag, als isomorphe topologische Räume solche anzusehen, deren Topologien gleich viele gleichmächtige offene Mengen aufweisen. Die Strukturgleichheit mit Hilfe einer bijektiven Abbildung zu zeigen, darauf kamen viele meiner Schüler nicht von selbst.¹⁾ Stellt man die entsprechende Definition vor, so leuchtet sie allen sofort ein.²⁾

Die vorangegangenen Ergebnisse über $f\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ Topologie der Definitionsmenge) und $f^{-1}\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ Topologie der Zielmenge) bei bijektiven Abbildungen setzen wir nun gewinnbringend ein. Wir erhalten für die beiden intuitiv als strukturgleich erkannten Topologien $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ folgendes:

$$f\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \quad \text{und} \quad f^{-1}\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$$

wobei f eine bijektive Abbildung von $M = \{a, b, c\}$ nach M ist. Da Homöomorphie äquivalent ist mit beiderseitiger Stetigkeit der bijektiven Abbildung, ist es bereits an dieser Stelle wichtig, beide obigen Aussagen herauszustellen. Die Bezeichnung Homöomorphie für die Isomorphie bei topologischen Räumen müßte nicht unbedingt eingeführt werden. Will man sparsamer sein mit dem Einführen neuer Bezeichnungen, so kann man meiner Meinung nach auch die Bezeichnung Isomorphie weiterverwenden ohne Schaden anzurichten.

Die Definition wird wie die früheren aus den bekannten Gründen in der ausführlichen und in der Kurzform angegeben. Die Bezeichnung "topologisch äquivalent" für homöomorphe Räume wird gern gebraucht, da Schüler mit der Aussprache des Wortes homöomorph Schwierigkeiten haben.

1) siehe Einschränkung (Kursteilnehmer Boolesche Algebra) auf S. 385

2) Bei den 17jährigen SchülerInnen gebrauchte ich den Vergleich Code (Wörterbuch) für die Abbildungsvorschrift einer bijektiven Abbildung zweier endlicher Mengen.

Es sollte nun Aufgabe der Schüler selbst sein, zahlreiche Beispiele für topologisch äquivalente Räume zu finden. Dabei sind die trivialen Topologien weniger interessant. So ist es gut, bei der Behandlung der induzierten Topologien Beispielmateriale erstellt zu haben. Allerdings kann es sein, daß der Lehrer zunächst Impulse geben muß, in dieser Richtung nach Beispielen für Homöomorphie zu suchen. Ich mußte in meinen Kursen außerdem darauf hinweisen, daß im Abschnitt 2.5.1 bei der Behandlung der Gleichmächtigkeit bereits verschiedene bijektive Abbildungen gesammelt worden waren.

Viele Schüler sind zu rasch mit Analogieschlüssen zur Hand, wo diese nicht berechtigt sind. Erfahrung durch Irrtum ist hier heilsam. Wobei ich nicht sagen möchte, daß es angebracht ist, "überevorsichtige Mathematiker" aus den Schülern zu machen. Verwegene (weil zunächst unbewiesene) Analogieschlüsse waren, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, ein Motor für Entdeckungen in der Mathematik. Allerdings sollte man den Schüler dazu erziehen, daß er nicht seinen raschen Analogieschlüssen soweit vertraut, daß er einen Beweis für überflüssig hält.

Ein Teil der Schüler hält I und Q (siehe Schülerbuch Seite 184) mit den jeweils induzierten Topologien für topologisch äquivalent, weil Gleichmächtigkeit gezeigt worden war. Ein Schüler, der seine Mitschüler vom Gegenteil überzeugen wollte, zog dazu die Abbildung p (Projektionsabbildung) heran, welche ja nicht bijektiv ist. Nach meiner Erfahrung könnte eine Diskussion etwas gelenkt werden, indem man gemeinsam daran geht, zusammenzustellen, was im einzelnen in einem Beweis der Aussage "I homöomorph Q" gezeigt werden müßte. Der Beweis für das Nichtgelten der Aussage muß nicht im Unterricht durchgeführt werden. Allenfalls könnte ein begabter und interessierter Schüler

auf entsprechende Quellen hingewiesen werden.

Nun folgen Aufgabe 122 und die Beispiele 60 und 61, die einestells den Begriff homöomorph durch weitere Beispiele farbiger erscheinen lassen sollen (bekannte Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich, sowie $\mathbb{I}$ in sich werden als Homöomorphismen erkannt), die andererseits auch nicht-homöomorphe Abbildungen aufzeigen, die später als stetige wiedererkannt werden sollen.

Von der Homöomorphie der Kurvenstücke ausgehend (diese wird mit Hilfe der Erkenntnis aus Aufgabe 123 gezeigt) stellen wir den Gesichtspunkt der Invarianten der topologischen Abbildungen in den Vordergrund. Diese "geometrische" Sichtweise der Topologie sollte nicht übergangen werden, wenn es unser Ziel ist, dem Schüler ein einigermaßen abgerundetes Bild von der Topologie zu geben. Die Schüler haben viel Spaß an den homöomorphen Buchstaben¹⁾ und die Betrachtung einer Netzkarte unter diesem Gesichtspunkt ist für sie immerhin frappierend. Allzu langes Verweilen auf diesen Themen ist nicht ratsam, die Schüler kommen sich für derlei bereits als zu erwachsen vor²⁾. Hier zeigen sich wieder Themen für Facharbeiten auf, die sie dann jedoch nicht nur mit Hilfe der Anschauung behandeln sollten. Die Gelegenheit, die Schüler mit dem Gedanken von den Invarianten einer Abbildung vertraut zu

1) Buchstaben als Teilmengen von $\mathbb{I}$; siehe S. 204/205

2) Die im Schnitt jüngeren Schülerinnen aus Kurs II hatten dagegen sehr viel Freude damit.

machen, sollte aus Gründen der mathematischen Allgemeinbildung nicht versäumt werden.

Netze und Bäume und andere Objekte der anschaulichen Topologie sollen jedoch wegen einer notwendigen Beschränkung der Themen nicht näher untersucht werden, auch wenn möglicherweise spätere Studenten der Wirtschaftswissenschaften, Kybernetik, Psychologie u.a. damit in ihrem Studium konfrontiert werden. Die sogenannte anschauliche Topologie soll vorerst der Mittelstufe (Sekundarstufe I) vorbehalten bleiben.

3.5.4 Zu: 2.5.4 Stetige Abbildungen

Es fällt auf, daß einige nicht-homöomorphe Abbildungen von $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ nach $(\mathbb{R}, \gamma_{\mathbb{R}})$ uns als stetige Abbildungen bekannt sind. Für den Durchschnittsschüler ist die Stetigkeit keine besonders bemerkenswerte Eigenschaft von Abbildungen. Somit kann nicht unbedingt erwartet werden, daß obige Überleitung von den nicht-homöomorphen Abbildungen zu den stetigen von selbst funktioniert. Die Frage nach der gemeinsamen Eigenschaft der Funktionen $f(x)=x^2$ und $k(x)=c$ wird möglicherweise nicht automatisch die Antwort "stetig" zeitigen. Oft wird man stattdessen Aussagen über die Bildmengen der Abbildungen hören. Wie kommt es, daß die Eigenschaft "stetig" der Abbildungen dem Schüler scheinbar so wenig Eindruck hinterläßt? Es gibt meines Erachtens mehrere Gründe:

- (a) Im Laufe des Unterrichts in Differentialrechnung geht der Schüler viel öfter mit stetigen als mit unstetigen Funktionen um, so daß eigentlich der zur Begriffsbildung nötige Kontrast fehlt.
- (b) Bei den sehr häufig geübten Kurvendiskussionen wird seltener nach Stetigkeit gefragt; nachträglich bringt man einige Schüler leicht dazu, Singularitäten irrtümlich für Unstetigkeitsstellen zu halten.
- (c) Unstetigkeit erlebt der Schüler trotz der (ε, δ) -Definition fast ausschließlich als Eigenschaft des Graphen (Kurve läßt sich nicht ohne Absetzen des Stiftes zeichnen); um die angestrebte Antwort "stetig" bei obigem Vergleich zu erzielen, mußte man dementsprechend nach den besonderen Eigenschaften des gezeichneten Graphen fragen. Dies wird freilich im Hinblick auf die allgemeine Definition der Stetigkeit nicht angestrebt.

- (d) Eine Einteilung der Abbildungen in stetige und in unstetige würde einen stärkeren Eindruck bei den Schülern hinterlassen, wenn stetige Abbildungen außer dieser Eigenschaft weitere auffallende Eigenschaften hätten, die die unstetigen nicht haben. Dies ist aber nicht der Fall. Denkt man z.B. an die Differenzierbarkeit, so zerfallen die stetigen Abbildungen ja wieder in zwei Klassen. Die Integrierbarkeit leistet das Gewünschte ebenfalls nicht. Zwar sind alle stetigen Funktionen integrierbar, aber auch unstetige Abbildungen können integrierbar sein.

Der Lehrer kann durch Erzeugung eines Kontrasts die Begriffsbildung noch verbessern. Dazu gibt er Abbildungen von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ nach $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ an, die nicht homöomorph und nicht stetig sind, Beispiel: $x \mapsto [x]$. Dies wurde im Schülerbuch unterlassen.

Hauptziel des Abschnitts ist die Definition der globalen Stetigkeit. Diese Definition soll wiederum nicht als Fertigprodukt dem Schüler vorgesetzt werden, sondern plausibel erscheinen bzw. sogar von den Schülern selbst aufgefunden werden. Andererseits soll didaktisch-methodische Redlichkeit davor bewahren, ein "Selbstentdecken" durch die Schüler dort vorzuspiegeln, wo es nicht möglich oder doch unwahrscheinlich ist. Die Vorbereitung auf Definition 42 geschieht durch die gelenkte Beschäftigung mit den Beispielen 63 und 64.

Die Tatsache, daß beide Abbildungen $f(x) = x^2$ und $k(x) = c$ keine Homöomorphismen von $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ in sich sind, soll näher untersucht werden. Dazu gibt der Lehrer den Auftrag, jeweils die Bilder der Topologien der De-

initions- und der Zielmenge (jeweils $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$) bezüglich der induzierten Abbildungen von f , f^{-1} bzw. k , k^{-1} mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ zu vergleichen. Dabei erhalten die Schüler für beide Abbildungen das Ergebnis, daß gilt:

$$\begin{array}{ll} f: \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \text{dagegen aber} \quad f^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \\ k: \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}} & \text{dagegen aber} \quad k^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \end{array}$$

Es können zusätzlich weitere von früher als stetig bekannte Abbildungen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ untersucht werden. Stets ist festzustellen

$$g^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

Diese Untersuchungen können an Teams verteilt werden. Einzelne Schüler oder Arbeitsgruppen untersuchen parallel zueinander verschiedene Abbildungen. Man mischt versteckt oder offen mindestens eine unstetige Abbildung unter die zu untersuchenden, um den Kontrast zu erreichen. Für die Abbildung $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x]$ erhalten wir

$$l^{-1}\mathcal{T}_{\mathbb{R}} \not\subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$$

Damit ist genügend Vorarbeit geleistet, um die Definition für globale Stetigkeit von Abbildungen allgemeiner topologischer Räume zu geben. Die Definition wird wieder sowohl in Kurzform wie in ausführlicher Form im Schülerbuch aufgeführt. Man kann im Unterricht eine der beiden Formen dem Schüler zur selbständigen Bearbeitung überlassen. Diese Definition soll nun auf bereits bekannte Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ angewendet werden.

Der Nachweis vereinfacht sich, wenn wir zeigen können, daß für eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{O}$ der Zielmenge gilt $f^{-1}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ Topologie der Definitionsmenge). Dies leuchtet den Schülern ein und man überlegt gemeinsam den kurzen Beweis. Dann wird Aufgabe 125 von den Schülern selbständig bearbeitet, nachdem der Beweisgang gemeinsam skizziert wurde.

Ziel der Aufgabe 125 ist es, zum Beweis der Aussage überzuleiten, daß alle ihm von früher als stetig bekannten Funktionen nun auch noch nach der neuen Definition stetig sind und umgekehrt. Die Hinführung auf den Beweis des Satzes 31 geschieht mittels Beispielen (Aufgaben 125 und Beispiel 65).

Der Lehrer muß darauf gefaßt sein, daß ein Teil der Schüler den Irrtum begeht, Funktionen, die sogenannte Definitionslücken aufweisen (die Definitionsmenge ist z.B. eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$) für unstetig zu halten. Man muß also in diesem Zusammenhang nochmals darauf hinweisen, daß die Frage nach der Stetigkeit einer Funktion nur dort gestellt werden kann, wo sie definiert ist.

Die an Beispielen gewonnene Vermutung, daß alte und neue Stetigkeitsdefinition äquivalent sind, muß noch allgemein bewiesen werden. Die frühere Stetigkeitsdefinition (die (ϵ, δ) -Definition) kann als lokale Stetigkeitsdefinition bezeichnet werden. Sie legt fest, wann eine Funktion in einem Punkt x_0 stetig ist. Die Übersetzung dieser Definition in die Sprache der Topologie fällt nicht schwer. Das Wort ϵ -Umgebung wird bereits in den meisten Analysis-Lehrgängen der Schule gebraucht.

Nachdem die lokale Stetigkeitsdefinition (Definition 43) in der kürzesten Form gewonnen ist (Satz 31), kann an den Beweis des Satzes gegangen werden. Man kann sich damit begnügen, daß die Schüler die vorgelegten Beweise für Satz 31 und Satz 32 nachvollziehend verstehen. Deshalb sind sie im Schülerbuch sehr ausführlich angegeben. Meine Beobachtung in den Versuchsklassen ist die, daß Schüler Schwierigkeiten mit der Schreibweise

$U \in \mathcal{U}_{x_0}$ oder $V \in \mathcal{U}_{f(x_0)}$ haben. Die Behandlung des Abschnitts 2.2.4 "Umgebungen eines Punktes" liegt immerhin schon einige Zeit zurück. Verwendet man statt der Elementbeziehung die Sprechweise "U Umgebung von x_0 " oder "V Umgebung von $f(x_0)$ ", so treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Um die Beweise zu Satz 31 und Satz 32 zu verstehen, muß der Schüler aber in jedem Fall die früher gesammelten Ergebnisse über Umgebungen eines Punktes parat haben.

Neben dem Aufzeigen der Äquivalenz beider Stetigkeitsdefinitionen (der globalen und der lokalen) ist es wichtig, sie auch einzeln zu würdigen. Wir haben mit ihnen ein Mittel in der Hand, Abbildungen allgemeiner topologischer Räume ineinander in stetige und unstetige einzuteilen. Auch wenn der Schüler - wie meine Erfahrung in den Versuchsklassen zeigte - die Nützlichkeitsfrage an diese erweiterte Stetigkeitsdefinition nicht stellt, sollte es sich der Lehrer nicht leicht machen, sondern diese Frage selbst anschneiden. Wir unterschätzen den Schüler, wenn wir davon ausgehen, daß ihn nur unmittelbar Anwendbares motiviert. Insofern wäre dann die Topologie für den Schüler tatsächlich wenig attraktiv. Die Bedeutung der Topologie für die Anwendungen (siehe hierzu auch S.38) liegt u.a. darin, daß ihre Aussagen dazu dienen, Existenzaussagen auf mathematischen Gebieten zu machen, die ihrerseits erst wiederum für die Anwendungen wichtig sind. Dies ist ein Argument das für Schüler zählt. Allerdings würde es für Schüler einsichtiger, wenn sie an wenigstens einem Beispiel einsehen könnten, wo es auf eine solche Existenzaussage ankommt. Dazu verwendete ich die Frage nach dem lokalen Maximum einer Funktion zweier Variabler einer Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. An diese Abbildungen mußten die Schüler sich erst gewöhnen, obwohl sie implizite Funktionen die-

ser Art bereits in der Vektorrechnung¹⁾ kennengelernt hatten (als Ebenengleichung oder unter gewissen Voraussetzungen²⁾ als Kugelgleichung). Sich die Darstellung einer Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ in einem kartesischen Koordinatensystem vorzustellen, fällt den älteren Schülern in der Versuchsklasse I nicht schwer. Für die Schülerinnen der Versuchsklasse II mußte ich anschauliche Hilfestellung geben. Die Möglichkeit der kartesischen Darstellung bot für die Schüler einen besonderen Reiz. Fast zu rasch wurde der Graph der Funktion als Fläche im $\mathbb{R}^3$ (die mit einem Gebirge verglichen wurde) von den Schülern angesprochen. Was entsprach der Fläche im $\mathbb{R}^3$ bei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$? Bei Graphen im $\mathbb{R}^2$ hatte es Definitionslücken und Unstetigkeitsstellen gegeben, die dafür verantwortlich waren, daß der Graph im $\mathbb{R}^2$ nicht zusammenhängend war. Das Analoge wird für Graphen im $\mathbb{R}^3$ gelten. Dies sehen alle Schüler ein, wenn man sie darauf aufmerksam macht. Sind die Bedingungen festgelegt, die gewährleisten, daß der Graph eine zusammenhängende Fläche ohne Löcher ist³⁾, so wird von den Schülern selbst die Frage nach dem Hochpunkt angeschnitten. Wieder sehr rasch wird vorgeschlagen, "die" Ableitung Null zu setzen, also analog wie bei Funktionen in $\mathbb{R}$ vorzugehen. Interessant ist, daß Schüler stets das Nächstliegende- und das sind für sie fast immer die Kalküle- analog übertragen wollen. Das obige Problem verlangt jedoch ein Analogon zur Bedingung der

-
- 1) Meiner Erfahrung nach steht das Wissen aus den beiden Disziplinen "Differentialrechnung" und "Vektorrechnung" (hier werden kurzerhand die in der Schule gebräuchlichen Bezeichnungen verwendet) jedoch bei den meisten Schülern leider völlig isoliert nebeneinander.
 - 2) Den Bedingungen für Funktionen genügen nur bestimmte Halbkugeln.
 - 3) diese Beschränkung ist für den vorliegenden Zweck vertretbar.

horizontalen Tangente, die lokal nicht von der Kurve durchsetzt wird, zu finden. Die Richtung der Tangentialebene kann durch die Angabe des (normierten) Normalenvektors festgehalten werden. Die stetige Differenzierbarkeit der zu untersuchenden Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann äquivalent mit der Stetigkeit einer Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, die dadurch gegeben ist, daß jedem Punkt im $\mathbb{R}^2$ ein Vektor der Länge 1, nämlich der oben genannte Normalenvektor zugeordnet wird. Dies ist den Schülern sehr einsichtig und sie bringen im Anschluß selbst Beschreibungen von Flächen im $\mathbb{R}^3$, die Graphen von Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ sind, die nicht überall "stetig differenzierbar"¹⁾ sind.

Mit diesem Beispiel, bei dem die Stetigkeit einer Abbildung betrachtet wird, deren Start- und Zielmenge einmal nicht $\mathbb{R}$ ist, kann man es bewenden lassen. Die Schüler sind für eine Beschäftigung mit der "neuen" globalen Stetigkeitsdefinition genügend motiviert. Damit diese inhaltlich voll erfaßt wird, und sich besser einprägen läßt, wird im Anschluß in Aufgabe 127 am Beispiel einer Abbildung eines endlichen topologischen Raumes nach einem anderen endlichen topologischen Raum die Stetigkeitsdefinition erprobt. Dies ist eine sehr leichte Aufgabe und sollte gleich zum nächsten Ziel überleiten, nämlich der Erkenntnis, daß die Stetigkeit einer gegebenen Abbildung allein davon abhängt, mit welchen Topologien jeweils die Definitions- und die Zielmenge ausgestattet sind. Am krassesten wird dies sichtbar, wenn als Topologie der Zielmenge die größte Topologie gewählt wird

1) Hier wird der Begriff unter Zugrundelegung der davor geschilderten Bedeutung von Graphen im $\mathbb{R}^2$ auf Graphen im $\mathbb{R}^3$ übertragen.

(Aufgabe 128) oder im anderen Fall, als Topologie der Definitionsmenge die feinste Topologie (Aufgabe 129). In beiden Fällen sind dann stets alle Abbildungen von der Definitionsmenge in die Zielmenge stetig. Der Nachweis ist in beiden Fällen leicht zu führen, auch wenn es sich hier um allgemeine Aussagen handelt. Schwächere Schüler ändern zu diesem Zweck zunächst Aufgabe 127 so ab, daß einmal die Topologie der Definitionsmenge die diskrete Topologie ist und das andere Mal die Topologie der Zielmenge die indiskrete. Mittels dieses Umwegs über eine konkrete Aufgabe kommen auch diese Schüler zu den allgemeinen Aussagen der Aufgaben 128 und 129.

Am Beispiel 67 wird die Erkenntnis nochmals bestärkt, daß die Stetigkeit der Abbildungen von den Topologien abhängt, mit denen die Definitionsmenge und die Zielmenge ausgestattet sind. Das Beispiel befaßt sich erneut mit der Abbildung $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, der sogenannten Projektionsabbildung. Dabei sei die Zielmenge $\mathbb{R}$ stets mit der Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ ausgestattet, $\mathbb{R}$ jedoch einmal mit der üblichen Topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ und einmal mit einer sogenannten Streifen-topologie. Stimmt die Streifenrichtung nicht mit der Projektionsrichtung überein, so liegt im zweiten Fall eine unstetige Abbildung vor. Beispiel 67 hat den Sinn, daß der Schüler Unstetigkeit - was die globale Definition betrifft - auch an unendlichen Topologien erfährt, was ich für unerlässlich halte. Ein wichtiges Betätigungsfeld, das sich hier anschließen würde, kann aus Zeitgründen nicht mehr in den Lehrgang aufgenommen werden. Es handelt sich um die Frage: Wie ist bei vorgegebener Abbildung und vorgegebener Topologie der Definitionsmenge die Topologie der Zielmenge zu wählen, damit die gegebene Abbildung stetig ist. Gleiches kann bei vorgegebener Topologie der Zielmenge für die Topologie der Definitionsmenge gefragt werden.

Für beide Fragen gibt es, wie wir oben gezeigt haben, je eine sofort auf der Hand liegende Antwort: Einmal Wahl von $\{\emptyset, M\}$ als Topologie der Zielmenge; zum anderen Wahl von $\mathcal{P}(M)$ als Topologie der Definitionsmenge. Werden die Anforderungen an die Topologien von Definitions- und Zielmenge verschärft, so ergeben sich interessantere Antworten. Da es mit der größten Topologie für die Zielmenge stets möglich ist, die gegebene Abbildung zu einer stetigen zu machen, wird nach feineren Topologien der Zielmenge gesucht, die dasselbe leisten - insbesondere dann nach der feinsten dieser Topologien. Wir finden als Lösung des Problems die Identifizierungstopologie zur Abbildung f in der Zielmenge. Wird nach der größten Topologie der Definitionsmenge gefragt, bei der die Abbildung $f : M \longrightarrow R$ stetig ist, so ist die durch die Abbildung f induzierte Topologie von M angesprochen.

Während wir im Unterricht diese Fragen nur noch streiften und sie in das Schülerbuch gar nicht aufgenommen wurden, sollte hier die Gelegenheit zu ansprechenden Themen für häusliche Facharbeiten nicht ungenutzt bleiben. Dabei gäbe es zweierlei Möglichkeiten für die Form solcher Facharbeiten. Die eine Form trägt in Anlehnung an die Fachliteratur die Sätze und Beweise zusammen. Die pädagogisch meiner Meinung nach höher einzuschätzende Form beschäftigt sich mit dem konkreten Vorfeld der speziellen Frage. Anknüpfungspunkt kann z.B. die Aufgabe sein, für eine Abbildung f von $M = \{a, b, c\}$ nach M die Stetigkeit zu untersuchen, wobei die Definitionsmenge und auch die Zielmenge M jeweils unterschiedlich mit den früher gefundenen Topologien von M ausgestattet werden. Auf diese Weise kristallisieren sich bei genügender Systematik des "Versuchs" die angestrebten Aussagen heraus. Werden an mehrere Schüler jeweils andere Abbildungen zur obigen Untersuchung übergeben, so wird das Feld der Beispiele reichhaltig genug ausfallen. Die aus-

gewählten Schüler könnten dann über ihre Ergebnisse in freier Rede vor der Klasse berichten.

Bei obigen Untersuchungen wird absichtlich die konstante Abbildung $k(x) = c$ (für alle $x \in M$) ausgeklammert. Mit dieser sollten sich alle Schüler beschäftigen. Die konstante Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist den Schülern bereits als stetig bekannt. Bei Wahl anderer Definitions- und Zielmengen anstelle von $\mathbb{R}$ erwarten die Schüler in diesem Augenblick nicht ohne weiteres die Stetigkeit der konstanten Abbildung. Die Aufgabe 130 ist für die Schüler demnach nicht trivial. Bei den vorangegangenen Fragestellungen haben wir stets bewußt die bijektiven Abbildungen ausgeklammert. Nun werden auch diese der Stetigkeitsfrage unterzogen und es kann gezeigt werden, daß Homöomorphismen stetige bijektive Abbildungen sind, die auch eine stetige Umkehrabbildung haben (Satz 33). An endlichen Beispielen sehen das die Schüler schnell ein. Die früher gefundenen Homöomorphismen von $(\mathbb{J}, \tau_{\mathbb{J}})$ dienen als weitere Beispiele (Aufgabe 131). Wendet man die Definitionen für globale Stetigkeit und für Homöomorphismen an, so ergibt sich unmittelbar der oben beschriebene Zusammenhang. An einem Beispiel wird außerdem gezeigt, daß es wesentlich für das Vorliegen eines Homöomorphismus ist, daß auch die Umkehrabbildung stetig ist. Wieder dient $\mathbb{J}$ mit einer Streifentopologie $\mathcal{O}$ als eindringliches Beispiel 68. Beispiel 69 beschäftigt sich nochmals mit der Peano-Abbildung. Es wird ohne Beweis aufgezeigt, daß diese Abbildung, obwohl sie bijektiv ist, keine topologische ist, weil zwar die Abbildung $\varphi : I \longrightarrow Q = I \times I$ eine stetige Abbildung ist, die Umkehrabbildung jedoch nicht.

Wie zu Beginn dieses Kapitels 3.5 ausgeführt, könnten nur unter bestimmten Voraussetzungen die algebraischen Eigenschaften, die wir von den stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ her kennen, auf allgemeinerer Ebene gesammelt werden. Dies würde weitere Neueinführungen erforderlich machen (siehe die entsprechenden Kapitel bei Papy¹⁾). Der dabei nötige methodische und zeitliche Aufwand würde nicht in günstiger Relation zu der momentanen Anwendbarkeit der dann erarbeiteten Aussagen innerhalb des Kurses stehen, sieht man von den Anwendungen ab, die bereits für stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ früher gemacht wurden.

Somit führe ich lediglich noch den Satz von der Verkettung stetiger Abbildungen auf, welcher als Aufgabe 132 allgemein bewiesen werden soll. Wieder können für schwächere Schüler endliche Beispiele zunächst als Stütze für das Auffinden des Beweisgedankens dienen. Die praktische Bedeutung der Aussage wird im Anschluß erläutert.

Zum Abschluß des Abschnitts 2.5.4 wird die Bedeutung der globalen Stetigkeitsdefinition abgezirkelt, indem festgestellt wird, daß globale Unstetigkeit nicht ausschließt, daß lokale Stetigkeit vorliegen kann. Entsprechend dem in 1.4.2 geschilderten methodischen Prinzip soll der Schüler hierfür selbst Beispiele finden (Aufgabe 133).

1) Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysis-Unterrichts. Göttingen 1970

3.5.5 Zu: 2.5.5 Konvergenz und Stetigkeit

Auf den Zusammenhang von Konvergenz und Stetigkeit einzugehen ist unerläßlich, da ein beträchtlicher Teil der Schüler die Aussage über den Zusammenhang von Stetigkeit und Konvergenz, die zu Beginn des Abschnitts 2.5.5 genannt wird, als Stetigkeitsdefinition für Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ aus dem Analysisunterricht kennt. Diese Schüler werden versucht sein, gerade weil ja der Konvergenzbegriff für Folgen in allgemeinen topologischen Räumen bekannt ist, diese Definition auch für Abbildungen allgemeiner topologischer Räume zu übernehmen. Der Vollständigkeit halber und damit sich nicht unbewußt falsche Vorstellungen einprägen, muß deshalb das Problem mit Satz 34 und Beispiel 70 geklärt werden. Das Beispiel zeigt - und jetzt wird klar, warum wir früher Beispiel 33 behandelten -, daß aus der Eigenschaft konvergenzerhaltend nicht immer die Eigenschaft stetig für Abbildungen folgt. Da wir uns den Filterbegriff sparen wollen, sind wir somit an eine gewisse Grenze gelangt.

Anders als der Grenzwert von Folgen liefern die Häufungspunkte von Mengen auch in allgemeinen topologischen Räumen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Stetigkeit von Abbildungen. Es rundet das Kapitel Stetigkeit ab, wenn wir darauf noch eingehen können. Eine Fortführung des Angeschnittenen in der Behandlung des Begriffs "kompakt" und dann außerdem des Bildes kompakter Mengen kann aus Zeitgründen nicht mehr geschehen.

Trotz der am Schluß eines Kurses meist auftretenden Eile, soll man doch die Behauptung des Satzes 35 nicht einfach fertig vorlegen. Durch die Untersuchung der Projektionsabbildung daraufhin, was dabei mit den abgeschlossenen Hüllen von Mengen geschieht, wird der Schüler auf Satz 35 eingestellt.

Die Stetigkeit der Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir früher nach gewiesen. Bei Vergleich der Mengen aus den Spalten ① und ② ergibt sich allerdings, daß diese gleich sind, wogegen in der Aussage des Satzes 35 die Teilmengenbeziehung steht. Durch ein zweites Beispiel (71) bringt der Schüler in Erfahrung, daß die Forderung der Gleichheit zu speziell ist. Beide Beispiele zusammen machen plausibel, daß aus der Stetigkeit von f folgt: $f[\bar{A}] \subseteq f[A]$, daß die genannte Teilmengenbeziehung also eine notwendige Bedingung für Stetigkeit von f ist. Wie wird es plausibel, daß dies auch eine hinreichende Bedingung für Stetigkeit ist? Dies leistet Aufgabe 135.

Der Beweis von Satz 35 ist sehr ausführlich wiedergegeben, um zum Selbststudium geeignet zu sein. Als Anwendung der Aussage des Satzes in $\mathbb{R}$ kennt der Schüler bereits den Zwischenwertsatz.

3.6 Zu: 2.6 Nachwort

Da ein solcher Kurs stets zeitlich beschränkt ist, muß Verzicht geleistet werden und man muß sich mit dem bisher behandelten Stoff zufrieden geben. Der interessierte Schüler wird jedoch die Gelegenheit nützen, selbst weiterzustudieren. In Kurs I wurde ich von drei Schülern um Literaturangaben gebeten. Deshalb wird an dieser Stelle des Schülerbuches nochmals eine Literaturliste von Büchern vorgelegt, die den Schüler nicht zu sehr überfordern.

Für alle Schüler möchte ich aber die rückblickenden Fragen verwendet wissen. Hat man sich im Laufe des Kurses mit vielen Einzelproblemen beschäftigt, so könnte es sein, daß die Schüler die große Linie des Kurses aus den Augen verloren haben. Dies könnte zur Folge haben, daß trotz intensiven Bemühens des Schülers, keine Gesamtvorstellung von der Disziplin Topologie in ihm entstanden ist. Diese Wirkung sollen die Fragen im Nachwort auffangen helfen. Meine Skepsis stellte sich in den Kursen I und II als zu stark heraus, da sich erwies, daß die Hauptthemen zumindest unmittelbar bei Beendigung des Kurses den Schülern klar vor Augen waren. Insgesamt gesehen sollte ein solcher Rückblick nicht entfallen, auch wenn man dafür Abstriche am Stoff machen müßte.

Literaturverzeichnis

1. Bücher

- Alexandroff, P.S.: Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen. 4. Aufl., Berlin 1967
- Allen, R.G.D.: Mathematical economics, second edition. London 1965
- Arnold, Bradford H.: Elementare Topologie. Anschauliche Probleme und grundlegende Begriffe. (Originaltitel: "Intuitive Concepts in Elementary Topology" Dt. v. H. Freund u.a.) Göttingen 1964
- Behnke, H.; Bachmann, F.; Fladt, K.; Süß, W. (Hrsg.): Grundzüge der Mathematik für Lehrer an Gymnasien sowie für Mathematiker in Industrie und Wirtschaft. Band III: Analysis. Göttingen 1962
Band II: Geometrie. Teil B: Geometrie in analytischer Behandlung mit einer Einführung in die Darstellende Geometrie und Topologie. 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Göttingen 1971
Band IV: Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik. Göttingen 1963
- Behnke, H.; Remmert, R.; Steiner, H.-G.; Tietz, H. (Hrsg.): Mathematik I. Fischer-Lexikon 29/1, Frankfurt a. Main 1970
- Behnke, H.; Tietz, H.: Mathematik II. Fischer-Lexikon 29/2, Frankfurt a. Main 1969
- Behnke, H.; Laub, J.; Hlawka, E.; Steiner, H.-G. (Hrsg.): Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen. Stuttgart 1969
- Belkner, H.: Metrische Räume. Mathematische Schülerbücherei Nr. 65, Leipzig 1972
- Bourbaki, N.: Les structures fondamentales de l'analyse livre III: Topologie générale, chap. I et chap. II
Chap. I: Structures topologiques
Chap. II: Structures uniformes
Paris 1951
- Bourbaki, N.: Les structures fondamentales de l'analyse livre III: Topologie générale
Chap. III: Groupes topologiques
Chap. IV: Nombres réels
Paris 1951
- Bourbaki, N.: Elements de Mathematique. Théorie des ensembles. Paris 1955
- Bourbaki, N.: Elemente der Mathematikgeschichte, Studia Mathematica, Band XXIII, Göttingen 1971

- Breidenbach, W. (Hrsg.): Mathematik für die Sekundarstufe I (mittlere und obere Leistungsgruppen). 10. Schuljahr, Braunschweig 1974
- Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Methodik der modernen Mathematik. Grundlagen für das Lernen in Zyklen (Originaltitel: "Approach to modern mathematics". Dt. von P. Herford u.a.). Freiburg 1970
- Dieudonné, J.: Grundzüge der modernen Analysis. 2. ber. Aufl., (Originaltitel: "Foundations of Modern Analysis". Dt. von L. Boll und K. Matthes). Braunschweig 1972
- Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Die Entdeckung des Raumes (Originaltitel: "Exploitation of Space and Practical measurement". Dt. von P. Sorger). Freiburg 1967
- Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Topologie und Schatten-geometrie (Originaltitel: "I. Geometry of Distortion". Dt. von P. Sorger und C. Wüster). Freiburg 1969
- Dienes, Z.P. und Golding, E.W.: Methodik der modernen Mathematik. Grundlagen für das Lernen in Zyklen (Originaltitel: "Approach to modern mathematics". Dt. von P. Herford u.a.). Freiburg 1970
- Franz, W.: Topologie I. Sammlung Götschen, Band 1181. Berlin 1965
- Frédérique et Papy: Spiele mit Hüten, für das 2. oder 3. Schuljahr. (Originaltitel: "Le jeu des chapeaux ou les surprises de l'infini".) Stuttgart 1972
- Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1 und 2. Stuttgart 1973
- Fricke, A. und Besuden, H.: Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart 1970
- Griesel, H.: Analysis I. Unterrichtshefte zur Mathematik von heute, Heft 0.4. Hannover 1968
- Griesel, H.: Analysis II. Unterrichtshefte zur Mathematik von heute, Heft 0.5. Hannover 1970
- Grottemeyer, K.P.: Topologie. B.I.-Hochschulkripten 836/836a. Mannheim 1969
- Kamke, E.: Mengenlehre. Sammlung Götschen, Band 999/999a. Berlin 1965
- Kelley, J.L.: General Topology. Toronto, New York, London 1965
- Kratz, H. (Hrsg.): Der Mathematikunterricht in der Kollegstufe. Schriftenreihe: ISP Kollegstufenarbeit. München 1972
- Kristensen, E.; Rindung, O.: Mathematischer Grundkurs für die Kollegstufe. (Originaltitel: "Mathematik I". Dt. von H. Wäsche). Göttingen 1971

- Kuypers, W. (Hrsg.): Mathematikwerke für Gymnasien, Oberstufe, Analysis I. Düsseldorf 1970
- Lenné, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Aus dem Nachlaß hrsg. von W. Jung, in Verb. mit der Arbeitsgruppe für Curriculum-Studien. Stuttgart 1969
- Lenz, H.: Grundlagen der Elementarmathematik. Berlin 1961
- Lietzmann, W.: Anschauliche Topologie. München 1965
- Lietzmann, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts. Nach der Bearb. von Stender R. erg. und überarb. von H. Jahner, 4. Aufl. Heidelberg 1968
- Lipschutz, S.: Theory and problems of general topology. Schaum's outline series. New York 1965
- Mader, Pietzsch, Lorenz, Stoye, Frank: Mathematik, 11. Klasse. Methodische Hinweise zum Lehrplan 1969. Berlin 1972
- Mathematical Reviews, Vol. 12. New York 1951
- Meschkowski, H.: Einführung in die moderne Mathematik. B.I.-Hochschulschriften Nr. 75/75a. Mannheim 1964
- Meschkowski, H.; Lessner, G.: Aufgabensammlung zur Einführung in die Mathematik. B.I.-Hochschulschriften 263/263a. Mannheim 1969
- Meschkowski, H.: Mathematik als Bildungsgrundlage. Braunschweig 1965
- Meschkowski, H. (Hrsg.): Mathematik-Duden für Lehrer. Mannheim 1969
- Meschkowski, H. (Hrsg.): Didaktik der Mathematik. Band III: Sekundarstufe II. Stuttgart 1973
- Möller, C.: Technik der Lehrplanung. Weinheim 1973
- New trends in mathematics teaching. Vol. I, (1966) prepared by The International Commission of Mathematical Instruction (ICMI). Paris 1967 (Unesco)
- Papy, G.: Topologie als Grundlage des Analysis-Unterrichts. (Originaltitel: "Le premier enseignement de l'analyse." Dt. von J. Hallé und H. Wunderling). Göttingen 1970
- Papy, G.: Arlon 6, Bruxelles 1968
- Papy, G.: Arlon 8, Bruxelles 1968
- Piaget, J. und Inhelder, B.: La représentation de l'espace chez l'enfant. Paris 1948
- Pickert, G.: Einführung in die Differential- und Integralrechnung (Klett Studienbücher). Stuttgart 1969

- Pickert, G.: Ebene Inzidenzgeometrie. Frankfurt 1958
- Pietzsch, G.: Zum Grenzwertproblem. Untersuchungsergebnisse zur Vorbereitung und Behandlung des Grenzwertbegriffs. Berlin 1967
- Polya, G.: Mathematik und plausibles Schließen, Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. (Originaltitel: "Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. 1: Induction and Analogy in Mathematics". Dt. von L. Bechtolsheim). Basel 1962
- Schneider, E.: Einführung in die Wirtschaftstheorie, Band 2: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft. 11. durchges. Aufl. Tübingen 1967
- Schubert, H.: Topologie. Eine Einführung. 3. Aufl. Stuttgart 1971
- Schulreform in Bayern, Band 2 Kollegstufe am Gymnasium. Herausgeg. v. Bayer. Staatsministerium f. Unterricht und Kultus, München 1972
- Schweizer, W. u.a. (Hrsg.): Lambacher-Schweizer, Mathematisches Unterrichtswerk, Analysis. Stuttgart 1967
- Schuster, H.: Ebene Inzidenzgeometrie. Stuttgart 1962
- Stender, R.: Didaktische Themen aus der neueren Mathematik. Heidelberg 1962
- Winkler, E.: Einführung in die Infinitesimalrechnung. München 1964
- Wörle, K.; Kratz, J.; Keil, K.A.: Infinitesimalrechnung. München 1965
- Wolff, G. (Hrsg.): Handbuch der Schulmathematik, Band 5
 Band 3: Geometrie der Unter- und Mittelstufe
 Band 5: Einzelfragen der Mathematik
 Band 7: Neuere Entwicklungen
 Hannover, Paderborn 1967

2. Aufsätze in Sammelwerken und Zeitschriften

- Athen, H.: "Die Vektorrechnung im Unterricht der deutschen höheren Schule" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart, Jg. 1 (1955), Heft 3, S. 5-21
- Besuden, H.: "Topologische Fragestellungen" in: Mathematik, Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart 1970, S. 147-160
- Dieudonné, H.: "Moderne Mathematik und Unterricht auf der höheren Schule" in: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Bd. 8 (1962), S. 166-178
- Dzewas, J.: "Filter im Analysisunterricht" in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen 1967, S. 175-188
- Dzewas, J.: "Topologische Strukturen im Analysisunterricht" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart, Jg. 16 (1970), Heft 1, S. 74-79
- Egsgard, H.C.: "Some Ideas in Geometry that can be taught from K-6" in: Educational Studies in Mathematics. Vol 2, No. 4, 1970, S. 481 ff
- Eisenbach, A.: "Elementare Beispiele zur Axiomatik" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 7 (1961), Heft 1, S. 38-56
- Freudenthal, H.: "Bemerkungen zur axiomatischen Methode im Unterricht" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 12 (1966), Heft 3, S. 61-65
- Gerretsen, J.; Rau, H.: "Konvergenz" in: Grundzüge der Mathematik, Bd. III, Göttingen 1968, S. 1-24
- Griesel, H.: "Von den Folgen zu den Filtern" in: Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Göttingen VI (1958), S. 31-45
- Häußler, M.: "Primat der Didaktik - aber Vetorecht der Methodik?" in: Didaktik der Mathematik. 1. Jg. (1973), Heft 3, S. 165-173
- Hahn, O.; Ellers, E.; Dzewas, J.: "Eine Einführung in die Analysis mittels des Filterbegriffs" Teil I und II in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. Bonn, Band 13, 1960/61, S. 432-448
Band 14, 1961/62, S. 342-355
- Hilbert, D.: "Axiomatisches Denken" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 12 (1966), Heft 3, S. 5-15
- Hilton, P.: "Topology in the High School" in: Educational Studies in Mathematics, Vol. 3 (1970-71) Dordrecht

- Hlawka, E.: "Die mengentheoretische Topologie" in: Beiträge zur Lehrerfortbildung. Band 3: Mathematik. Wien 1971, S. 48-71
- Holvoet, R.: "Stetige Abbildungen" in: Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen. Stuttgart 1969, S. 125-142
- Ineichen, R.: "Über die Grundlage und den Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung" in: Der Mathematikunterricht. Jg. 6 (1960), Heft 3, S. 7-15
- Jahner, H.: "Ein topologischer Weg zum Satz über die Annahme der Grenzen bei stetigen Funktionen" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart 18/1972/3, S. 27-41
- Joachim, E.: "Verallgemeinerte Folgen in der Analysis" in: Praxis der Mathematik. Köln 14/1972/3, S. 63-67
- Kahl, U.: "Analysis unter topologischen Gesichtspunkten im Unterricht" in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. Bonn/Frankfurt 23/1970/ H. 2, S. 83-92
- Kirsch, A.: "Endliche Gruppen als Gegenstand für axiomatische Übungen" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 9 (1963), Heft 4, S. 88-98
- Liedl, R.: "Mengentheoretische Topologie" in: Überblicke Mathematik 3; B.I.-Hochschulschriften 247/247a. Mannheim 1970, S. 135-157
- Mellin, E.: "Topologie in der Realschule" in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, Teil 2, Hannover 1971, S. 187-199
- Mühlbach, R.: "Filter und andere moderne Begriffsbildungen in der Analysis" in: Schriftenreihe zur Schulmathematik. Nr. 8, Hamburg (1962)
- Papy, G.: "Die ersten Begriffe der Topologie" in: Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen. Stuttgart 1969, S. 72-82
- Papy, G.: "Die topologischen Räume im elementaren Analysis-Unterricht" in: Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen. Stuttgart 1969, S. 83-124
- Pickert, G.: "Folgen und Filter in der Infinitesimalrechnung" in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht. Bonn, Band 13/1960/61, S. 150-153
- Remmert, R.: "Topologie" in: Fischer-Lexikon, Mathematik I, Frankfurt/M. 1968, S. 292-309

- Rüthing, D.: "Zum topologischen Stetigkeitsbegriff im Analysisunterricht" in: Praxis der Mathematik. Köln Jg. 15 (1973), Heft 12, S. 319-326
- Seebach, K.: "Anschauliche Topologie" in: Handbuch der Schulmathematik, Bd. 5, Hannover 1967, S. 26-38
- Seebach, K.: "Strukturierte Mengen" in: Handbuch der Schulmathematik, Band 7. Hannover 1967, S. 49-82
- Servais, W.: "Vorbereitung der 12- bis 15-jährigen für den Analysisunterricht" in: Die Neugestaltung des Mathematikunterrichts an den höheren Schulen. Stuttgart 1969, S. 66-71
- Sielaff, K.: "Zur Motivation der Stetigkeit" in: Bericht über die 4. Tagung der Fachleiter für Mathematik der Studienseminare der Bundesrepublik und Westberlins (vom 28.9. bis 3.10.1970). Schriften des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V., Heft 15
- Steiner, H.-G.: "Elementare Logik und Wahrscheinlichkeitstheorie" in: Der Mathematikunterricht, Stuttgart Jg. 8 (1962), Heft 1, S. 16-38
- Steiner, H.-G.: "Zur Behandlung des Funktionsbegriffs" in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen 1967, S. 139-171
- Steiner, H.-G.: "Mathematisierung und Axiomatisierung einer politischen Struktur. Ein Beispiel zur axiomatischen Methode im mathematischen Unterricht." in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 12 (1966), Heft 3, S. 66-86
- Steiner, H.-G.: "Zur Didaktik der elementaren Gruppentheorie" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 11 (1965), Heft 1, S. 20-39
- Steiner, H.-G.: "Menge, Struktur, Abbildung als Leitbegriffe für den modernen mathematischen Unterricht" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 11, (1965), Heft 1, S. 5-19
- Steiner, H.-G.: "Verschiedene Aspekte der axiomatischen Methode im Unterricht" in: Les Repercussions de la Recherche Mathématique sur l'Enseignement (Originaltexte der Tagung in Echternach, Sommer 1965) Luxembourg 1966
- Steiner, H.-G.: "Algebra im Unterricht der Oberstufe der Gymnasien" in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen 1967
- Steiner, H.-G.: "Zum Aufbau einer Vorlesung über 'Analysis in didaktischer Sicht'" in: Mathematischer Unterricht an deutschen Universitäten und Schulen. Göttingen 1967, S. 265-286

- Wäsche, H.: "Stetigkeit und Konvergenz" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart 18/1972/3, S. 5-18
- Wallrabenstein, H.: "Unterrichtsversuche zur Topologie im 5. Schuljahr" in: Die Schulwarte, Villingen Jg. 23 (1970), Heft 12, S. 45-54
- Wallrabenstein, H.: "Unterrichtsversuche zur Topologie im 5. und 6. Schuljahr" in: Beiträge zum Mathematikunterricht 1971, Hannover 1972, S. 250-264
- Walther, A.: "Mathematik als Einheit aus reiner und angewandter Mathematik" in: Grundzüge der Mathematik, Band IV: Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik. Göttingen 1966
- Weidig, I.: "Topologische Fragen in der geometrischen Propädeutik" in: Der Mathematikunterricht. Stuttgart Jg. 16/1970, Heft 1, S. 5-17
- Weise, K.: "Ausgewählte Fragen der Topologie" in: Grundzüge der Mathematik, Band II, Teil B. Göttingen 1971, S. 382-468

3. Nicht veröffentlichte Quellen

- Schweiger, P.: "Bericht über einen Vorversuch zur Topologie im Unterricht". Salzburg 1972
- Sorger, P.; Freund, H.: "Fähigkeiten im mathematischen Anfangsunterricht - Versuch einer Operationalisierung" Vortrag auf der 8. Bundestagung für Didaktik der Mathematik, Berlin 1974

Lebenslauf

Gisela S t u d e n y , geb. Albrecht, geb. am 28.9.1943
in Leipzig

1949 - 1953	Volksschulbesuch in München
1953 - 1955	Besuch des St.-Anna-Gymnasiums, München
1955 - 1962	Besuch des wirtschaftswissenschaftlichen Gymnasiums in München
Juli 1962	Abitur
September 1962	Verleihung des Stipendiums für Besonders Begabte
WS 1962 - SS 1967	Studium der Mathematik und Physik an der Universität München
Herbst 1967	Erstes Staatsexamen für das höhere Lehramt in Mathematik (Zulassungsfach) und Physik
Dezember 1967 - Oktober 1969	Referendarausbildung in München am Rupprechtgymnasium, davon ein Jahr Zweigschuleinsatz am Kurt-Huber-Gymnasium Gräfelfing
Oktober 1969	Zweites Staatsexamen für das höhere Lehramt
November 1969 - Februar 1970	Verwalterin der Dienstgeschäfte eines Assistenten an der Pädagogischen Hochschule der Universität München
März 1970 - Oktober 1975	Assistentin am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik (mit Auftrag für Lehrveranstaltungen)
seit November 1975	Studienrätin für Didaktik der Mathematik am Erziehungswissenschaftlichen Fachbereich der Universität München
seit September 1978	Studienrätin für Didaktik der Mathematik am Fachbereich Mathematik der Ludwig-Maximilians-Universität München

